

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Tekintsük az (S_5, \cdot) szimmetrikus csoportot (az ötödrendű permutációk csoportját).

a) Igazold, hogy az $f: S_5 \rightarrow S_5, f(x) = x^7$ függvény bijektív!

b) Oldd meg az $x^7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ egyenletet az S_5 halmazon!

2. feladat. Határozd meg az összes olyan $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ kétszeresen deriválható függvényt, amelyre $f(1) = f'(1) = e$ és

$$f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot f^2(x),$$

bármely x valós szám esetén.

3. feladat. Legyen (G, \cdot) egy $6n + 1$ elemű csoport, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Igazold, hogy G -nek egyetlen olyan eleme van, amely önmaga inverze!

b) Ha a H halmaznak legalább $2n$ eleme van és (H, \cdot) részcsoportha a (G, \cdot) csoportnak, igazold, hogy $H = G$.

4. feladat. Számítsd ki az

$$I = \int \frac{e^x x^2 + 2x + 1}{e^{2x} x^2 + e^x x^2 + x} dx$$

integrált, ahol $x > 0$.