CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Tekintsük az $(S_5, \cdot)$ szimmetrikus csoportot (az ötödrendű permutációk csoportját).

a) Igazold, hogy az $f\colon S_5 \to S_5$, $f(x) = x^7$ függvény bijektív!

b) Oldd meg az $x^7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ egyenletet az S_5 halmazon!

Biró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az $(S_5, \cdot)$ véges csoportban minden elem rendje osztója a csoport rendjének, a csoport rendje pedig $|S_5| = 5! = 120$. **(1 pont)**
Tekintsük a σ és τ S_5-beli permutációkat. A fentiek alapján igaz, hogy $\sigma^{120} = \tau^{120} = e$, ahol e az identikus permutáció S_5-ben. **(1 pont)**
Ha $f(\sigma) = f(\tau)$, akkor $\sigma^7 = \tau^7$. **(1 pont)**
Viszont $120 = 119 + 1 = 7 \cdot 17 + 1$, ezért $e = \sigma^{120} = \sigma^{119} \cdot \sigma = (\sigma^7)^{17} \cdot \sigma$ és $e = \tau^{120} = \tau^{119} \cdot \tau = (\tau^7)^{17} \cdot \tau$, ahonnan $\sigma = (\sigma^7)^{-17} = (\tau^7)^{-17} = \tau$. Tehát az f függvény injektív. **(1 pont)**
Mivel S_5 véges halmaz és az $f\colon S_5 \to S_5$ függvény injektív, az f függvény szürjektív is. Tehát f bijektív. **(1 pont)**

b) Jelöljük α-val a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ permutációt. Észrevehetjük, hogy $\alpha^3 = e$ (például onnan, hogy $\alpha = (142)(3)(5) = (142)$). **(1 pont)**
Így $\alpha^7 = (\alpha^3)^2 \cdot \alpha = e \cdot \alpha = \alpha$, vagyis α megoldása az egyenletnek. **(2 pont)**
Az *a)* alpont értelmében az egyenletnek egy és csakis egy megoldása van, így α az egyetlen megoldás. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Határozd meg az összes olyan $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ kétszeresen deriválható függvényt, amelyre $f(1) = f'(1) = e$ és

$$f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot f^2(x),$$

bármely x valós szám esetén.

Dr. Bencze Mihály, Brassó
Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Az adott $f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 = \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot f^2(x)$ egyenlőséget a következő alakban írhatjuk:

$$\frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = \frac{1-\ln x}{x^2},$$

ami az $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$ egyenlőséggel egyenértékű. (**2 pont**)
Így $\int \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx = \int \frac{1-\ln x}{x^2} dx$, tehát $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln x}{x} + C$. (**1 pont**)
Ez alapján $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \left(\frac{\ln x}{x} + C\right) dx$, ami az $\ln|f(x)| = \frac{1}{2}\ln^2 x + cx + d$ egyenlőséghez vezet. (**2 pont**)
Mivel $f(x) > 0$, minden x valós számra, az összefüggés egyenértékű az $f(x) = e^{\frac{\ln^2 x}{2} + cx + d}$ egyenlőséggel, minden $x > 0$ esetén. (**1 pont**)
Az egyenlőség $x = 1$-re $f(1) = e^{c+d}$, és mivel $f(1) = e$, így $c + d = 1$. Hasonlóan $\frac{f'(1)}{f(1)} = c$, de a kezdeti feltétel alapján $\frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{e}{e} = 1$. A két összefüggés alapján $c = 1$ és $d = 0$. (**2 pont**)
Tehát a keresett függvény az $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = e^{\frac{\ln^2 x}{2} + x}$. (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** Legyen $(G, \cdot)$ egy $6n + 1$ elemű csoport, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Igazold, hogy G-nek egyetlen olyan eleme van, amely önmaga inverze!

b) Ha a H halmaznak legalább $2n$ eleme van és $(H, \cdot)$ részcsoportja a $(G, \cdot)$ csoportnak, igazold, hogy $H = G$.

Szilágyi Judit, Kolozsvár
Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Az $x = x^{-1}$ egyenlőség az $x^2 = e$ egyenlőséggel egyenértékű, minden $x \in G$ esetén. Ha $x = e$, akkor teljesül az $e^2 = e$ egyenlőség. (**1 pont**)
Ha $x \neq e$, és $x^2 = e$, akkor az x elem rendje 2. (**1 pont**)
Mivel 2 nem osztója $6n + 1$-nek, az x elem rendje nem lehet 2, így az egységelemen kívül nincs olyan elem a G-ben, ami önmaga inverze. (**1 pont**)

b) Legyen H elemszáma k. Lagrange tétele alapján $k \mid (6n + 1)$, ugyanakkor $k \geq 2n$. (**2 pont**)
Legyen d_{min} a $6n + 1$ legkisebb és d_{max} a legnagyobb valódi osztója, ekkor $d_{max} = \frac{6n+1}{d_{min}}$. (**1 pont**)
Mivel $2 \nmid (6n + 1)$, $3 \nmid (6n + 1)$, sőt $4 \nmid (6n + 1)$, így $d_{min} \geq 5$, tehát $d_{max} \leq \frac{6n+1}{5} < 2n$. (**2 pont**)
Ezek alapján $k \geq 2n$, $d_{max} < 2n$, tehát $k > d_{max}$, viszont $k \mid (6n + 1)$, ahonnan $k = 6n + 1$. Vagyis $H = G$. (**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont)**.** Számítsd ki az

$$I = \int \frac{e^x x^2 + 2x + 1}{e^{2x} x^2 + e^x x^2 + x} \mathrm{d}x$$

integrált, ahol $x > 0$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az integrálandó törtfüggvényt egyszerűsítjük x^2-tel, így a következő alakban írhatjuk:

$$I = \int \frac{e^x x^2 + 2x + 1}{e^{2x} x^2 + e^x x^2 + x} dx = \int \frac{e^x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}} dx = \int \frac{u(x)}{v(x)} dx$$

(2 pont)

A nevező deriváltja $v'(x) = (e^{2x} + e^x + \frac{1}{x})' = 2e^{2x} + e^x - \frac{1}{x^2}$. **(2 pont)**

Az I integrált az

$$I_1 = \int \frac{2e^{2x} + e^x - \frac{1}{x^2}}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}} dx = \int \frac{v'(x)}{v(x)} dx$$

és

$$I_2 = \int \frac{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}} dx = \int \frac{v(x)}{v(x)} dx$$

integrálok lineáris kombinációjaként, vagyis $I = \alpha I_1 + \beta I_2$ alakban írjuk fel (ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$). **(2 pont)**

Ehhez tulajdonképpen az $u(x) = \alpha \cdot v'(x) + \beta \cdot v(x)$ egyenlőséget teljesítő α, β valós számokat kell megkeresnünk. A számítások elvégzése után kapjuk, hogy $\alpha = -1$ és $\beta = 2$, vagyis

$$I = -\int \frac{2e^{2x} + e^x - \frac{1}{x^2}}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}} dx + 2\int \frac{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}}{e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}} dx$$

Tehát

$$I = -\int \frac{v'(x)}{v(x)} dx + 2\int \frac{v(x)}{v(x)} dx = -\ln|v(x)| + 2x + C = -\ln\left|e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}\right| + 2x + C$$

(2 pont)

Mivel $x > 0$ így

$$I = -\ln\left(e^{2x} + e^x + \frac{1}{x}\right) + 2x + C$$ **(1 pont)**

■