V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat. Legyen $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ úgy, hogy $A^3B = I_n - B$.

a) Igazold, hogy B invertálható!

b) Igazold, hogy $AB = BA$.

2. feladat. Adottak az $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ különböző sorozatok, amelyekre $a_1, b_1 > 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + b_n^2$ és $b_{n+1} = 2a_nb_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Igazold, hogy az $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens!

3. feladat. Jelölje $[x]$ az x valós szám egész részét. Tekintsük az $(a_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozatot, amelyre $a_1 = \dfrac{3}{2}$ és $a_{n+1} - a_n = 2[a_n]$, minden $n \geq 1$ esetén.

a) Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagját!

b) Igazold, hogy
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{k+1} = \frac{2a_{2n+2} + 16a_{n+1} + 4n - 31}{16}.$$

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2023 + a_n} + \dfrac{1}{2023^2 + a_n} + \cdots + \dfrac{1}{2023^n + a_n}\right)$ határértéket!

4. feladat. Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrixok úgy, hogy $(A - B)^2 = O_2$.

a) Igazold, hogy $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$.

b) Ha $AB = BA$, akkor bizonyítsd be, hogy $\det(A) = \det(B)$.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.