CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Legyen $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ úgy, hogy $A^3B = I_n - B$.

a) Igazold, hogy B invertálható!

b) Igazold, hogy $AB = BA$.

Dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A feltétel alapján $A^3B = I_n - B$, ezért $A^3B + B = I_n$, tehát $(A^3 + I_n)B = I_n$. **(1 pont)**
Innen következik, hogy $\det((A^3 + I_n)B) = \det(I_n)$, tehát $\det(A^3 + I_n)\det(B) = 1$. **(1 pont)**
Ebből következik, hogy $\det(B) \neq 0$, így B invertálható, és $B^{-1} = A^3 + I_n$. **(1 pont)**

b) Beszorozva az $A^3B = I_n - B$ összefüggést balról, illetve jobbról A-val kapjuk, hogy:

$$A^4B = A - AB \quad \text{és} \quad A^3BA = A - BA. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Kivonva egymásból a két egyenlet megfelelő oldalát kapjuk, hogy

$$A^4B - A^3BA = A - AB - (A - BA) \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahonnan következik, hogy $A^3(AB - BA) = -(AB - BA)$, ezért $(A^3 + I_n)(AB - BA) = O_n$.
(1 pont)
Az előző pont eredménye alapján következik, hogy $B^{-1}(AB - BA) = O_n$,
ahonnan $BB^{-1}(AB - BA) = O_n$, azaz $AB - BA = O_n$ tehát $AB = BA$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Adottak az $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ különböző sorozatok, amelyekre $a_1, b_1 > 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + b_n^2$ és $b_{n+1} = 2a_nb_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Igazold, hogy az $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens!

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az rekurziók alapján felírható, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2a_nb_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{a_n}\right), \quad \forall\, n \geq 1. \tag{1}$$

(**2 pont**)

Legyen $\frac{a_n}{b_n} = x_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Mivel $a_1, b_1 > 0$, ezért $a_n, b_n > 0$, minden $n \geq 1$ esetén. Innen kapjuk, hogy $x_n > 0$, bármely $n \geq 1$ esetén. (**1 pont**)

Az (1) összefüggés egyenértékű az $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right), n \geq 1$ összefüggéssel. (**1 pont**)

Mivel $x_n > 0$, ezért $x_n + \frac{1}{x_n} \geq 2$. Így $x_{n+1} \geq 1$, minden $n \geq 1$ esetén, vagyis $x_n \geq 1$, bármely $n \geq 2$ esetén. (**1 pont**)

Az $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2+1}{2x_n} - x_n = \frac{(1-x_n)(1+x_n)}{2x_n}$. Ugyanakkor $x_n \geq 1$, minden $n \geq 2$ esetén, ahonnan $1 - x_n \leq 0$, minden $n \geq 2$ esetén. Tehát $x_{n+1} - x_n \leq 0$, vagyis $x_{n+1} \leq x_n$, minden $n \geq 2$ esetén következik, hogy az $(x_n)_{n\geq 2}$ sorozat csökkenő. (**2 pont**)

Mivel az $x_n > 0$, minden $n \geq 1$ esetén, ezért az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat alulról korlátos. (**1 pont**)

Tehát Weierstrass tételét felhasználva az $(x_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens. (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** Jelölje $[x]$ az x valós szám egész részét. Tekintsük az $(a_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozatot, amelyre $a_1 = \dfrac{3}{2}$ és $a_{n+1} - a_n = 2[a_n]$, minden $n \geq 1$ esetén.

a) Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagját!

b) Igazold, hogy
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{k+1} = \frac{2a_{2n+2} + 16a_{n+1} + 4n - 31}{16}.$$

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2023 + a_n} + \dfrac{1}{2023^2 + a_n} + \cdots + \dfrac{1}{2023^n + a_n} \right)$ határértéket!

Dr. Bence Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) A rekurziót átírhatjuk, mint $a_{n+1} = 2[a_n] + a_n$. Felírjuk a sorozat néhány tagját:
$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{3}{2},\\
a_2 &= 2[a_1] + a_1 = 2\cdot 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2},\\
a_3 &= 2[a_2] + a_2 = 2\cdot 3 + 3 + \frac{1}{2} = 3^2 + \frac{1}{2}\\
a_4 &= 2[a_3] + a_3 = 2\cdot 3^2 + 3^2 + \frac{1}{2} = 3^3 + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$
(**1 pont**)

Észrevesszük, hogy $a_n = 3^{n-1} + \frac{1}{2}$. (**1 pont**)

Igazoljuk a matematikai indukció módszerével a sejtést. Az $n = 1$ esetén $a_1 = 3^0 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ igaz. Feltételezzük, hogy $a_k = 3^{k-1} + \frac{1}{2}$ és ellenőrizzük, hogy $a_{k+1} = 3^k + \frac{1}{2}$. A rekurzió és az indukciós feltevés alapján

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2[a_k] + a_k \\ &= 2\left[3^k + \frac{1}{2}\right] + 3^k + \frac{1}{2} \\ &= 2 \cdot 3^k + 3^k + \frac{1}{2} \\ &= 3 \cdot 3^k + \frac{1}{2} \\ &= 3^{k+1} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

tehát a sejtés igaz. **(2 pont)**

b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} \left(3^{k-1} + \frac{1}{2}\right)\left(3^k + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(3^{2k-1} + \frac{1}{2}\cdot 3^k + \frac{1}{2}\cdot 3^{k-1} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 3^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} + \frac{n}{4} \end{aligned}$$ **(1 pont)**

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot \frac{(3^2)^n - 1}{3^2 - 1} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} + \frac{n}{4} \\ &= \frac{3^{2n+1} - 3}{8} + \frac{4(3^n - 1)}{4} + \frac{n}{4} \end{aligned}$$ **(1 pont)**

$$\begin{aligned} &= \frac{3^{2n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 3 + 8(3^n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1) + 2n}{8} \\ &= \frac{2a_{2n+2} + 16a_{n+1} + 4n - 31}{16}. \end{aligned}$$ **(1 pont)**

c) Felírhatjuk, hogy

$$\frac{1}{2023^n + a_n} \leq \frac{1}{2023^k + a_n} \leq \frac{1}{2023 + a_n},$$

minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. Összeadva az egyenlőtlenségeket a $k = 1, \ldots, n$ esetén kapjuk, hogy

$$\frac{n}{2023^n + a_n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2023^k + a_n} \leq \frac{n}{2023 + a_n}.$$ **(1 pont)**

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2023^n + a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2023^n + 3^{n-1} + \frac{1}{2}} = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2023 + a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2023 + 3^{n-1} + \frac{1}{2}} = 0$, ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2023^k + a_n} = 0$. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrixok úgy, hogy $(A - B)^2 = O_2$.

a) Igazold, hogy $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B)$.

b) Ha $AB = BA$, akkor bizonyítsd be, hogy $\det(A) = \det(B)$.

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $(A-B)^2 = O_2$, ezért $\det(A-B) = 0$. **(1 pont)**
A Cayley–Hamilton-tétel felírva az $(A-B)$ mátrixra kapjuk, hogy

$$(A-B)^2 - \mathrm{Tr}\,(A-B)\cdot(A-B) + \det(A-B)I_2 = O_2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Felhasználva az $(A-B)^2 = O_2$ és $\det(A-B) = 0$ összefüggéseket következik, hogy

$$\mathrm{Tr}\,(A-B)\cdot(A-B) = O_2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Innen $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{Tr}\,(A-B)\cdot(A-B)) = 0$, így $[\mathrm{Tr}\,(A-B)]^2 = 0$. De $\mathrm{Tr}\,(A-B) = \mathrm{Tr}\,(A) - \mathrm{Tr}\,(B)$, ezért $[\mathrm{Tr}\,(A) - \mathrm{Tr}\,(B)]^2 = 0$, tehát $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$. **(1 pont)**

b) Mivel $AB = BA$, ezért fennáll az $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, így az előző alpont alapján

$$\det(A^2 - B^2) = \det[(A+B)(A-B)] = \det(A+B)\det(A-B) = 0. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Bevezetjük a $t = \mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$, $\alpha = \det A$ és $\beta = \det(B)$ jelöléseket. A Cayley–Hamilton-tétel alapján $A^2 - tA + \alpha I_2 = O_2$ és $B^2 - tB + \beta I_2 = O_2$, amelyeket kivonva egymásból kapjuk, hogy $A^2 - B^2 = t(A-B) - (\alpha-\beta)I_2$. **(1 pont)**
Két esetet különböztetünk meg.

I. Ha $t = 0$, akkor $A^2 - B^2 = -(\alpha-\beta)I_2$, így $0 = \det(A^2 - B^2) = (\alpha-\beta)^2 \cdot 1$, tehát $\det(A) = \alpha = \beta = \det(B)$. **(1 pont)**

II. Ha $t \neq 0$, akkor

$$\det(A^2 - B^2) = \det[t(A-B) - (\alpha-\beta)I_2] = \det\left(t\left[(A-B) - \frac{\alpha-\beta}{t}I_2\right]\right). \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ismeretes, hogy $\det[(A-B) - xI_2] = x^2 - \mathrm{Tr}\,(A-B)x + \det(A-B)$, továbbá a korábbról ismert $\mathrm{Tr}\,(A-B) = 0$ és $\det(A-B) = 0$ összefüggések alapján $\det[(A-B) - xI_2] = x^2$. Innen következik, hogy

$$\det(A^2 - B^2) = t^2 \det\left((A-B) - \frac{\alpha-\beta}{t}I_2\right) = t^2\left(\frac{\alpha-\beta}{t}\right)^2 = (\alpha-\beta)^2,$$

de mivel $\det(A^2 - B^2) = 0$, ezért $(\alpha-\beta)^2 = 0$, tehát $\det(A) = \alpha = \beta = \det(B)$. **(1 pont)**

■