V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$2^{\cos 3x} + \cos^3 x = 8^{-\cos x}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Tudjuk, hogy $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. **(1 pont)**

$$2^{\cos 3x} + \cos^3 x = 8^{-\cos x} \iff 2^{4\cos^3 x - 3\cos x} + \cos^3 x = 2^{-3\cos x} \iff$$
$$\iff \cos^3 x = 2^{-3\cos x} - 2^{4\cos^3 x - 3\cos x} \iff \cos^3 x = 2^{-3\cos x}(1 - 2^{4\cos^3 x}).$$ **(2 pont)**

Az $y = \cos x \in [-1, 1]$ helyettesítéssel az

$$y^3 = 2^{-3y}(1 - 2^{4y^3}) \iff y^3 \cdot 2^{3y} = 1 - 2^{4y^3} \iff y^3 \cdot 2^{3y} + 2^{4y^3} = 1$$

egyenlethez jutunk. **(2 pont)**
Ekkor tekintsük a következő $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(y) = y^3 \cdot 2^{3y} + 2^{4y^3}$ függvényt. Mivel ez a függvény szigorúan növekvő függvények összege, így f is szigorúan növekvő, tehát injektív. Vagyis az

$$y^3 \cdot 2^{3y} + 2^{4y^3} = 1$$

egyenletnek csak egy megoldása van a valós számok halmazán, ez pedig az $y = 0$. **(3 pont)**
Tehát $\cos x = 0$, ahonnan $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Tudjuk, hogy $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. **(1 pont)**

$$2^{\cos 3x} + \cos^3 x = 8^{-\cos x} \iff 2^{\cos 3x} + 4\frac{\cos^3 x}{4} = 2^{-3\cos x}$$
$$\iff 2^{\cos 3x} + \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{4} = 2^{-3\cos x} - \frac{3\cos x}{4}$$
$$\iff 2^{\cos 3x} + \frac{\cos 3x}{4} = 2^{-3\cos x} - \frac{3\cos x}{4}.$$ **(3 pont)**

Ekkor tekintsük a következő $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = 2^t + \frac{t}{4}$ függvényt. Ez szigorúan növekvő, tehát injektív. **(1 pont)**

$$2^{\cos 3x} + \frac{\cos 3x}{4} = 2^{-3\cos x} - \frac{3\cos x}{4} \iff f(\cos 3x) = f(-3\cos x).$$

Mivel a függvény injektív, így $f(\cos 3x) = f(-3\cos x)$ egyenértékű a $\cos 3x = -3\cos x$ összefüggéssel. **(2 pont)**

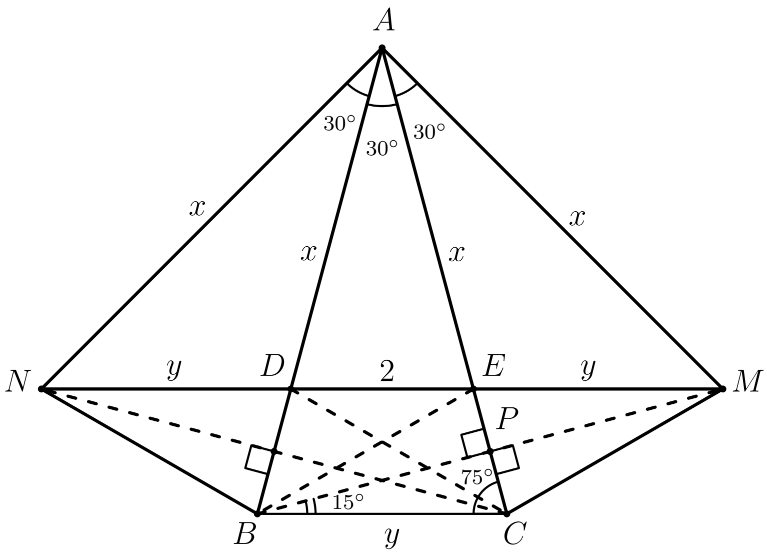
$$\cos 3x = -3\cos x \iff 4\cos^3 x - 3\cos x = -3\cos x \iff \cos x = 0.$$

Tehát $\cos x = 0$, ahonnan $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **(2 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszögben $AB = AC$ és $\widehat{A} = 30°$. Legyen M és N a B és C pontok AC, illetve AB oldalak szerinti szimmetrikusa. Az MN egyenes D és E pontokban metszi az AB, illetve AC oldalakat. Ha $DE = 2$ cm, számítsd ki a BC oldal hosszát!

Zajzon Csaba, Barót



Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Mivel a B és M pontok szimmetrikusak az AC oldalra nézve, következik, hogy $\widehat{CAM} = \widehat{CAB} = 30°$ és $AB = AM$. Hasonlóan $\widehat{NAB} = \widehat{BAC} = 30°$ és $NA = AC$. Ezek alapján következik, hogy $MAN_{\triangle}$ derékszögű és egyenlő szárú. **(1 pont)**

Mivel B és M, valamint N és C szimmetrikusak az AC, illetve AB oldalakra nézve, ezért $BC = CM$ és $BE = EM$. **(1 pont)**

Legyen $BM \cap AC = \{P\}$. A BPA derékszögű háromszögben $\widehat{B} = 60°$. A BAC egyenlő szárú háromszög $\widehat{BAC} = 30°$, tehát $\widehat{ABC} = 75°$. Ezek alapján $\widehat{PBC} = 15°$. **(1 pont)**

Mivel a MAN háromszög derékszögű és egyenlő szárú, következik, hogy $\widehat{AMN} = 45°$. Az APM háromszögben $\widehat{AMP} = 90° - 30° = 60°$. Ezek alapján $\widehat{EMP} = 15° = \widehat{EBP}$, és ezen kívül $\widehat{PBC} = 15°$, ahonnan következik, hogy $BE = BC = CM = EM$, tehát $BCME$ rombusz. **(2 pont)**

Hasonlóan igazoljuk, hogy $BCDN$ rombusz, ahonnan $EM = ND = BC$ és $EM \parallel BC \parallel ND$, tehát $DE \parallel BC$. **(1 pont)**

Bevezetjük az $AB = x$ és $BC = y$ jelöléseket. Az MAN derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva felírhatjuk, hogy

$$x^2 + x^2 = (2y + 2)^2 \iff x^2 = 2(y + 1)^2. \tag{1}$$

(1 pont)

Az ABC háromszögben a koszinusz tételt alkalmazva felírhatjuk, hogy

$$y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos 30°,$$

tehát

$$y^2 = 2x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{2}$$

(1 pont)

Így az (1) és a (2) összefüggésekből következik, hogy

$$\begin{aligned} & y^2 = 4(y+1)^2 \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \iff & y^2 = (y+1)^2(4-2\sqrt{3}), \quad y > 0 \\ \iff & y = (y+1)\sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ \iff & y = \frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}} \\ \iff & y = \sqrt{3}+1. \end{aligned}$$

Tehát $BC = \sqrt{3}+1$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Legyen x, y, $z \in (1, +\infty)$ és $x \cdot y \cdot z = p$. Igazold, hogy

$$\log_p x \cdot \sqrt[3]{1 + \log_p y - \log_p z} + \log_p y \cdot \sqrt[3]{1 + \log_p z - \log_p x} + \log_p z \cdot \sqrt[3]{1 + \log_p x - \log_p y} \leq 1.$$

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az $a = \log_p x$, $b = \log_p y$ és $c = \log_p z$ jelöléseket bevezetve az $a + b + c = \log_p xyz = \log_p p = 1$ összefüggést kapjuk. **(1 pont)**

A fenti jelölésekkel a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} + b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} + c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$ **(1 pont)**

Igazoljuk, hogy a, b, $c > 0$. Mivel $x > 1$ és $xyz > 1$, így $a = \log_p x = \log_{xyz} x > \log_{xyz} 1 = 0$. Hasonlóan $b > 0$, $c > 0$. Mivel $a, b, c > 0$ és $a + b + c = 1$, következik, hogy $a, b, c \in (0, 1)$. Ezért $1 + b - c > 1 + 0 - 1 = 0$. **(1 pont)**

Mivel az $1 + b - c$, 1 és 1 pozitív valós számok, a mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{(1+b-c) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{1+b-c+1+1}{3},$$

vagyis

$$\sqrt[3]{(1+b-c)} \leq \frac{3+b-c}{3}.$$ **(3 pont)**

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk az a pozitív számmal. Így

$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} \leq \frac{3a+ab-ac}{3}.$$ **(1 pont)**

Hasonlóan

$$b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} \leq \frac{3b+bc-ab}{3},$$

$$c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq \frac{3c+ac-bc}{3}.$$

A három egyenlőtlenséget összeadjuk, így az

$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} + b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} + c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq \frac{3(a+b+c)}{3} = 1 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. ■

4. feladat (10 pont)**.** Határozd meg azokat az $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek teljesítik az

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 4 + \frac{2}{x-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

összefüggést!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A megadott összefüggésben az $y = \frac{x-1}{x}$ helyettesítést végezzük. Innen $yx = x-1$, tehát $\frac{1}{1-x} = \frac{y-1}{y}$. **(1 pont)**
Így kapjuk, hogy $f(y) + f\left(\frac{y-1}{y}\right) = 4 + \frac{2-2y}{y}$, minden $y \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Tehát

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 4 + \frac{2-2x}{x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}. \tag{3}$$

(2 pont)
Most a $z = \frac{1}{1-x}$ helyettesítést végezzük a megadott egyenletben, így $\frac{x-1}{x} = \frac{1}{1-z}$. **(1 pont)**
Ez alapján az adott egyenletből kapjuk, hogy $f(z) + f\left(\frac{1}{1-z}\right) = 4 - 2z$, minden $z \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, tehát

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 4 - 2x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}. \tag{4}$$

(2 pont)
Összeadva a (3)-as és a (4)-es egyenletek megfelelő oldalait, kapjuk, hogy

$$2f(x) + 4 + \frac{2}{x-1} = 6 - 2x + \frac{2}{x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ha ezt elosztjuk 2-vel és átrendezzük, megkapjuk a keresett függvényt $f : \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 1 - x - \frac{1}{x(x-1)}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

5. feladat (10 pont)**.** Az $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ olyan természetes számok, amelyekre létezik $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2023}^2 = n^2 + 2.$$

Igazold, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ számok nem lehetnek mind páratlanok!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

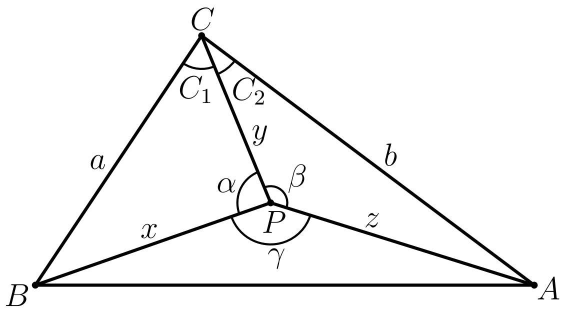
Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Ha n páros, akkor $n^2 + 2$ páros szám. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ mind páratlan számok lennének, akkor négyzetösszegük is páratlan lenne, ami így nem lehet egyenlő az $n^2 + 2$ páros számmal. Tehát a számok nem lehetnek mind páratlanok. **(2 pont)**
Ha n páratlan, felételezzük, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ számok mind páratlanok. Ekkor

$$a_i = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 8m + 1$$

alakú, minden $i = \overline{1, 2023}$ esetén. **(2 pont)**
Így $\sum\limits_{i=1}^{2023} a_i^2 = 8M + 2023 = 8M + 8 \cdot 252 + 7 = 8M + 7$ alakú. **(2 pont)**
Mivel n páratlan szám, az n lehet $8k+1$, $8k+3$, $8k+5$ vagy $8k+7$ alakú. Így n^2 mindenik esetben $8k+1$ alakú, tehát $n^2 + 2 = 8M + 3$ alakú, ami nem lehet egyenlő a $8M + 7$ alakú számmal. **(2 pont)**
Tehát az $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ számok nem lehetnek mind páratlanok. **(1 pont)**
■

6. feladat (10 pont)**.** Legyen P az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontja. Jelöljük rendre a PB, PC és PA szakaszok hosszát x, y és z-vel, a $\widehat{BPC}$, $\widehat{CPA}$ és $\widehat{APB}$ szögek mértékét α, β és γ-val. Igazold, hogy $(x\cos\alpha - y)(z\cos\beta - y)$ kifejezés értéke akkor maximális, ha P a C-ből húzott szögfelezőn helyezkedik el!

Mészár Julianna, Nagyszalonta és Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad



Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Bevezetjük az $BC = a$, $AC = b$, $\widehat{PCB} = \widehat{C_1}$ és $\widehat{ACP} = \widehat{C_2}$ jelöléseket. A PBC és PAC háromszögekben a koszinusz tételt alkalmazva felírhatjuk, hogy $\cos\alpha = \frac{x^2+y^2-a^2}{2xy}$ és $\cos\beta = \frac{y^2+z^2-b^2}{2yz}$. **(1 pont)**

Innen

$$(x\cos\alpha - y)(z\cos\beta - y) = \left(x\cdot\frac{x^2+y^2-a^2}{2xy} - y\right)\cdot\left(z\cdot\frac{y^2+z^2-b^2}{2yz} - y\right)$$
$$= \frac{x^2-y^2-a^2}{2y}\cdot\frac{z^2-y^2-b^2}{2y}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A PBC és ABC háromszögekben a koszinusz tétel alapján $\cos\widehat{C_1} = \frac{a^2+y^2-x^2}{2ay}$ és $\cos\widehat{C_2} = \frac{y^2+b^2-z^2}{2by}$.
(1 pont)

Tehát

$$(x\cos\alpha - y)(z\cos\beta - y) = \frac{-2ay\cos\widehat{C_1}}{2y}\cdot\frac{-2by\cos\widehat{C_2}}{2y} = ab\cos\widehat{C_1}\cdot\cos\widehat{C_2} \qquad \textbf{(2 pont)}$$
$$= \frac{1}{2}ab\left(\cos(\widehat{C_1}+\widehat{C_2}) + \cos(\widehat{C_1}-\widehat{C_2})\right)$$
$$= \frac{1}{2}ab\left(\cos\widehat{C} + \cos(\widehat{C_1}-\widehat{C_2})\right). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel a koszinusz függvény csökkenő a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, ez a kifejezés pontosan akkor lesz maximális, ha $\cos(\widehat{C_1}-\widehat{C_2}) = 1$, vagyis $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$, tehát CP az $\widehat{ACB}$ szögfelezője. **(1 pont)**

■