V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

X. osztály – I. forduló

1. feladat. Adott az $n \geq 2$ természetes szám. Határozd meg az $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

$$f(1) = 1 \quad \text{és}$$

$$f(\sqrt[n]{x \cdot y}) \geq \sqrt[n]{x^{2023}} \cdot f(\sqrt[n]{y}), \quad \text{bármely } x, y \geq 0.$$

2. feladat. Oldd meg az

$$x^3 + 3x^2 + 6x - 8 = (3x^2 + x + 2)\sqrt{x+2}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

3. feladat. Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [n, n+1]$ valós számok, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Igazold, hogy

$$2n \leq \log_{x_1}[(2n+1)x_2 - n(n+1)] + \log_{x_2}[(2n+1)x_3 - n(n+1)] + \ldots + \log_{x_n}[(2n+1)x_1 - n(n+1)] < 2n\log_n(n+1).$$

4. feladat. Adott a $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ komplex szám.

a) Igazold, hogy $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \geq 2$.

b) Igazold, hogy $2\left(|1+z| + |1+z^2|\right) + |1+z^3| \geq 2 + \sqrt{2}$.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.