V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

X. osztály – II. forduló

1. feladat. Egy diáktanács szavazásán három jelöltre lehetett szavazni. Összesen 2023-an szavaztak. Minden szavazat érvényes volt és mindenki csak egy jelöltre szavazott. Határozd meg, hogy hányféleképpen oszolhattak meg a szavazatok a jelöltek között, ha tudjuk, hogy bármelyik két jelölt összesen több szavazatot kapott, mint a harmadik!

2. feladat. Az ABC háromszög súlypontja G. Bizonyítsd be a

$$4 \cdot (AB + BC + CA) - 12 \cdot \left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right) \leq 3$$

egyenlőtlenséget, és add meg az egyenlőség feltételét!

3. feladat. Egy egyenesen Imre megjelölt k darab pontot, ahol k természetes szám, $2 \leq k \leq 2021$. Ezután minden szomszédos pontpár között megjelölt még egy újabb pontot, és így tovább. Lehet-e egy ilyen eljárás végén 2022 pont az egyenesen? Hát 2033 pont? Ha ezek valamelyike elérhető, akkor abban az esetben mennyi lehet a k legkisebb értéke?

4. feladat. Az ABC háromszög az A csúcsban derékszögű. A C középpontú és CA sugarú kör, valamint a B középpontú és BA sugarú kör a BC átfogót D, illetve E pontokban metszi. Az ADE háromszög köré írt kör az AB, illetve AC befogót az F, illetve G pontokban metszi. Számítsd ki az FG szakasz hosszát, tudva, hogy $AB = 15$ cm és $AC = 8$ cm!

5. feladat. Oldd meg a nullától különböző természetes számok halmazán az $5^x - 1 = 2^y \cdot 3^z$ egyenletet! Ismertnek tekintjük, hogy a nullától különböző természetes számok halmazán a $2^x - 3^y = 1$ egyenletnek csak az $x = 2$ és $y = 1$ a megoldása, míg a $3^x - 2^y = 1$ egyenletnek csak az $x = y = 1$, valamint az $x = 2$ és $y = 3$ a megoldásai.

6. feladat. A valós számok halmazán oldd meg a

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \dfrac{2y}{y^2+1} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}} = \dfrac{2x}{x^2+1} \end{cases}$$

egyenletrendszert!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.