CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV

országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

X. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Adott az $n \geq 2$ természetes szám. Határozd meg az $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

$$f(1) = 1 \quad \text{és}$$

$$f(\sqrt[n]{x \cdot y}) \geq \sqrt[n]{x^{2023}} \cdot f(\sqrt[n]{y}), \quad \text{bármely } x, y \geq 0.$$

(Zákány Mónika, Nagybánya)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Mivel a $h : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $h(x) = \sqrt[n]{x}$ függvény bijektív, ezért bármely $u \in [0,\infty)$ szám egyértelműen felírható $u = \sqrt[n]{x}$ alakba, tehát a feladat feltétele a következő formába írható:

$$f(1) = 1 \quad \text{és} \quad f(u \cdot v) \geq u^{2023} \cdot f(v), \quad \forall\, u, v \in [0,\infty). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ha $u = x$ és $v = 1$, akkor azt kapjuk, hogy $f(x) \geq x^{2023}$ bármely $x \in [0,\infty)$ esetén. **(2 pont)**

Legyen most $u = \frac{1}{x}$ és $v = x \cdot y, x > 0, y \geq 0$. Ekkor azt kapjuk, hogy $f(y) \geq \frac{1}{x^{2023}} \cdot f(x \cdot y)$, ahonnan következik, hogy $f(x \cdot y) \leq x^{2023} \cdot f(y)$, bármely $x > 0$ és $y \geq 0$ esetén. **(2 pont)**

Ha $y = 1$ azt kapjuk, hogy $f(x) \leq x^{2023}$, bármely $x > 0$ esetén. Tehát $f(x) = x^{2023}$, ha $x > 0$, valamint $f(x) = a$, ha $x = 0$, ahol $a \geq 0$. **(1 pont)**

Ha $x > 0$ és $y = 0$, akkor $f(\sqrt[n]{x \cdot y}) = f(0) = a$. Innen a feltétel alapján kapjuk, hogy

$$a \geq \sqrt[n]{x^{2023}} \cdot f(\sqrt[n]{y}) = \sqrt[n]{x^{2023}} \cdot a$$

bármely $x > 0$, ami csak az $a = 0$ esetén teljesülhet. **(1 pont)**

Tehát $f(x) = x^{2023}$ bármely $x \in [0,\infty)$ esetén. **(1 pont)**

Az így kapott $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2023}$ függvény teljesíti a feladat feltételeit. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Oldd meg az

$$x^3 + 3x^2 + 6x - 8 = (3x^2 + x + 2)\sqrt{x+2}$$

egyenletet a valós számok halmazán! *(Kovács Béla, Szatmárnémeti)*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az egyenlet értelmezési tartománya $[-2,\infty)$. **(1 pont)**

Az adott egyenletrendszert rendezzük x és $x + 2$ szerint.

$$x^3 + 3x(x+2) - 8 = 3x^2\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x+2}$$

$$\iff x^3 - 3x^2\sqrt{x+2} + 3x(x+2) - (x+2)\sqrt{x+2} = 8. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Az egyenlet baloldalán kialakult egy teljes köb:

$$(x-\sqrt{x+2})^3 = 8 \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$\iff x-\sqrt{x+2} = 2$$
$$\iff x-2 = \sqrt{x+2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ha $x \geq -2$, akkor $\sqrt{x+2}$ értelmezett és $\sqrt{x+2} \geq 0$. Következik, hogy $x-2 \geq 0$ vagyis $x \geq 2$. **(1 pont)**
Az egyenlet megoldásait a $[2,\infty)$ intervallumon keressük. Az egyenletet négyzetre emelve és rendezve az $x^2-5x+2=0$ egyenletet kapjuk, melynek megoldásai $x_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ és $x_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$. **(1 pont)**
Ezek közül a megfelelő megoldás az $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$. **(1 pont)**

Megjegyzés. Jelölje $\sqrt{x+2} = t, t \geq 0$. Ekkor $x = t^2-2$ helyettesítéssel az eredeti egyenlet $t^6-3t^5-3t^4+11t^3+6t^2-12t-16=0$ alakban írható. Az egyenletet felbontva:

$$t^6-3t^5-3t^4+11t^3+6t^2-12t-8 = 8 \iff$$

$$(t^2-t-2)^3 = 8 \iff t^2-t-2 = 2 \iff t^2-t-4 = 0.$$

Megoldva a kapott másodfokú egyenletet, $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \geq 0$, ahonnan az $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$.

■

3. feladat (10 pont)**.** Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [n, n+1]$ valós számok, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Igazold, hogy

$$2n \leq \log_{x_1}[(2n+1)x_2-n(n+1)]+\log_{x_2}[(2n+1)x_3-n(n+1)]+...+\log_{x_n}[(2n+1)x_1-n(n+1)] < 2n\log_n(n+1).$$

(Longáver Lajos, Nagybánya)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Először lássuk be, hogy ha $x \in [a,b]$, akkor

$$(a+b)x-ab \geq x^2 \qquad (1)$$

Valóban, ha $x \in [a,b]$, akkor $x-a \leq 0$ és $x-b \geq 0$, mely egyenlőtlenségeket összeszorozva, azt kapjuk, hogy $x^2-(a+b)x+ab \leq 0$, ahonnan következik az (1) egyenlőtlenség. **(2 pont)**
Továbbá, legyen $a=n$, $b=n+1$ és az x helyére rendre $x_1, x_2, ..., x_n$-et írva azt kapjuk, hogy:

$$\begin{gathered}
\log_{x_1}[(2n+1)x_2-n(n+1)] \geq \log_{x_1}(x_2)^2 = 2\log_{x_1} x_2,\\
\log_{x_2}[(2n+1)x_3-n(n+1)] \geq \log_{x_2}(x_3)^2 = 2\log_{x_2} x_3,\\
\vdots\\
\log_{x_n}[(2n+1)x_1-n(n+1)] \geq \log_{x_n}(x_1)^2 = 2\log_{x_n} x_1,
\end{gathered}$$

mert a logaritmusok alapjai nagyobbak mint 1.
Bevezetjük az $x_{n+1} = x_1$ jelölést. Összeadva a kapott egyenlőtlenségeket, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \log_{x_i}[(2n+1)x_{i+1}-n(n+1)] \geq 2\cdot\sum_{i=1}^{n}\log_{x_i} x_{i+1}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Alkalmazva a számtani és mértani középarányosok közti egyenlőtlenséget a $\log_{x_1} x_2, \log_{x_2} x_3, ..., \log_{x_n} x_1$ pozitív számokra azt kapjuk, hogy:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \log_{x_i} x_{i+1} \geq 2n \cdot \sqrt[n]{(\log_{x_1} x_2) \cdot (\log_{x_2} x_3) \cdot ... \cdot (\log_{x_n} x_1)} = 2n.$$

Ezzel az első egyenlőtlenséget igazoltuk. **(2 pont)**
Mivel $n \leq x_i, x_{n+1} \leq n+1$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\log_{x_i}[(2n+1)x_{i+1} - n(n+1)] &\leq \log_n[(2n+1)x_{i+1} - n(n+1)] \qquad (2)\\ &\leq \log_n[(2n+1)(n+1) - n(n+1)] \qquad (3)\\ &= \log_n(n+1)^2 = 2\log_n(n+1),\end{aligned}$$

minden $x_i, x_{i+1} \in [n, n+1]$ esetén. **(2 pont)**
Az így kapott egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \log_{x_i}[(2n+1)x_{i+1} - n(n+1)] \leq 2n \log_n(n+1).$$ **(1 pont)**

Az egyenlőség csak akkor teljesülne, ha

$$\log_{x_i}[(2n+1)x_{i+1} - n(n+1)] = 2\log_n(n+1), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ez pontosan akkor áll fenn, ha a (2), illetve a (3) egyenlőtlenségekben egyenlőség van, vagyis $x_i = n$, illetve $x_{i+1} = n+1$. Ha $i = 1$, akkor következik, hogy $x_1 = n$, $x_2 = n+1$, ha pedig $i = 2$, akkor $x_2 = n$ és $x_3 = n+1$. Tehát x_2 egyidőben n és $n+1$ is kellene, hogy legyen, ami lehetetlen. Tehát az egyenlőtlenség szigorú. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Adott a $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ komplex szám.

a) Igazold, hogy $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \geq 2$.

b) Igazold, hogy $2(|1+z| + |1+z^2|) + |1+z^3| \geq 2 + \sqrt{2}$.

(Bencze Mihály, Brassó)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen

$$2 = |1+z+1-z| \leq |1+z| + |1-z| = |1+z| + |1+z^3 - (z+z^3)| \leq |1+z| + |1+z^3| + |z| \cdot |1+z^2|$$

(2 pont)

Mivel a $|z| = 1$, ezért

$$|1+z| + |1+z^3| + |z| \cdot |1+z^2| = |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3|.$$

Tehát $|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \geq 2$. **(1 pont)**

b) Az a) alpont eredményét felhasználva azt kell igazolni, hogy

$$|1+z|+|1+z^2| \geq \sqrt{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $|z| = 1$ következik, hogy $z = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$, ahol $\alpha \in [0, 2\pi)$. A modulusok összege felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned}
|1+z|+|1+z^2| &= |1+\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha| + |1+\cos 2\alpha + i\cdot \sin 2\alpha| \\
&= \sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} + \sqrt{(1+\cos 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha} \\
&= \sqrt{2+2\cos\alpha} + \sqrt{2+2\cos 2\alpha} \qquad \textbf{(1 pont)} \\
&= 2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} + 2\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \\
&= 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| + 2|\cos\alpha| = 2\left(\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| + \left|2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right|\right). \qquad \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

Jelöljük a $\cos\frac{\alpha}{2}$-t x-szel. A bizonyítandó egyenlőtlenség így alakul:

$$2\left(|x| + |2x^2-1|\right) \geq \sqrt{2}, \quad \text{bármely}\, x \in [-1, 1]\, \text{esetén}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tekintsük az $f : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + |2x^2 - 1|$ függvényt.
Ha $x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +1\right]$, akkor $|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát $f(x) = |x| + |2x^2-1| > \frac{\sqrt{2}}{2}$. **(1 pont)**

Ha $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$, akkor $f(x) = -2x^2 - x + 1$. Mivel $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4} \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$, az f függvénynek a minimuma a $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-ben vagy a 0-ban van. $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(0) = 1$. Tehát $f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, bármely $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$ esetén.

Hasonlóan kapjuk, hogy $f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, bármely $x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ esetén. **(1 pont)**

Tehát $|1+z| + |1+z^2| \geq \sqrt{2}$.

■