CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

X. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Egy diáktanács szavazásán három jelöltre lehetett szavazni. Összesen 2023-an szavaztak. Minden szavazat érvényes volt és mindenki csak egy jelöltre szavazott. Határozd meg, hogy hányféleképpen oszolhattak meg a szavazatok a jelöltek között, ha tudjuk, hogy bármelyik két jelölt összesen több szavazatot kapott, mint a harmadik!

Faluvégi Melánia, Zilah és Szilveszter Ibolya, Temesvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Vezessük be a következő jelöléseket:

- x - az első jelölt szavazatainak száma;
- y - a második jelölt szavazatainak száma;
- z - a harmadik jelölt szavazatainak száma.

Ekkor $x + y + z = 2023, x, y, z \in \mathbb{N}$ és innen $x = 2023 - (y + z)$. **(1 pont)**
A feltételekből felírhatjuk, hogy $x + y > z$, $y + z > x$ és $z + x > y$. **(1 pont)**
A fentiekből következik, hogy $2023 - (y + z) + y > z \Longrightarrow z \leq 1011$. **(1 pont)**
Hasonlóan $2023 - (y + z) + z > y \Longrightarrow y \leq 1011$ és **(1 pont)**
$y + z > 2023 - (y + z) \Longrightarrow y + z \geq 1012$. **(1 pont)**
Tehát $1012 \leq z + y \leq 2022$. **(1 pont)**
Innen az (z, y) számpárok száma $1011 \cdot 1011 = 1011^2$. **(2 pont)**
Minden (z, y) számpár esetén az x egyértelműen meghatározott, mert $x + y + z = 2023$. Ezért az (x, y, z) számhármasok száma szintén 1011^2.
Tehát a lehetséges esetek száma 1011^2. **(1 pont)**
■

2. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszög súlypontja G. Bizonyítsd be a

$$4 \cdot (AB + BC + CA) - 12 \cdot \left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right) \leq 3$$

egyenlőtlenséget, és add meg az egyenlőség feltételét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Ha A' a BC oldal felezőpontja, a, b és c a háromszög BC, CA, és AB oldalainak hossza, valamint $AA' = m_a$, akkor $GA = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3}m_a$, ahol $m_a^2 = \frac{2\cdot(b^2+c^2)-a^2}{4}$. **(1 pont)**
Hasonlóan a B' az AC oldal felezőpontja $GB = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}m_b$, ahol $m_b^2 = \frac{2\cdot\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}$ és a C' az AB oldal felezőpontja $GC = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3}m_c$, ahol $m_c^2 = \frac{2\cdot\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$. **(1 pont)**
Tehát $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9} \cdot (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$. **(1 pont)**

A bizonyítandó egyenlőtlenség átírható a vele egyenértékű $4\left(a^2+b^2+c^2\right)-4(a+b+c)+3 \geq 0$ alakba és ezt a következőképpen bizonyítjuk: **(2 pont)**
$4 \cdot \left(a^2+b^2+c^2\right)-4 \cdot (a+b+c)+3=\left(4a^2-4a+1\right)+\left(4b^2-4b+1\right)+\left(4c^2-4c+1\right)=$
$=(2a-1)^2+(2b-1)^2+(2c-1)^2 \geq 0.$ **(2 pont)**
Egyenlőség akkor áll fenn, ha $2a-1=0$, $2b-1=0$ és $2c-1=0$, **(1 pont)**
tehát az egyenlőség feltétele $a=b=c=\frac{1}{2}$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Egy egyenesen Imre megjelölt k darab pontot, ahol k természetes szám, $2 \leq k \leq 2021$. Ezután minden szomszédos pontpár között megjelölt még egy újabb pontot, és így tovább. Lehet-e egy ilyen eljárás végén 2022 pont az egyenesen? Hát 2033 pont? Ha ezek valamelyike elérhető, akkor abban az esetben mennyi lehet a k legkisebb értéke?

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Minden lépésnél eggyel kevesebb pontot jelölt meg, mint amennyi már megvan jelölve az egyenesen. Ha az első lépésben Imre k pontot jelölt be az egyenesen, akkor a következő lépésben újabb $k-1$ pontot jelölt meg, vagyis az első lépés után $2k-1$ megjelölt pont van. **(1 pont)**
Ha $2k-1$ megjelölt pont van az egyenesen, akkor a következő lépésben újabb $2k-2$ pontot jelölt be, vagyis összesen $4k-3$ megjelölt pont lesz. A következő lépésekben $8k-7$, majd $16k-15$ megjelölt pont lesz. **(1 pont)**
Az a sejtésünk, hogy az n-edik lépés után $2^n \cdot k-(2^n-1)=2^n(k-1)+1$ megjelölt pont lesz. Ha ehhez hozzáveszünk az $(n+1)$-dik lépésben megjelölt újabb $2^n(k-1)$ pontot, akkor az $(n+1)$-dik lépés után $2^{n+1}(k-1)+1$ megjelölt pont lesz, tehát a sejtésünk igaz. **(3 pont)**
A $2^n(k-1)+1$ nem lehet egyenlő 2022-vel, mert a bal oldal páratlan. Tehát az eljárás végén nem lehet 2022 pont az egyenesen. **(1 pont)**
Vizsgáljuk a $2^n(k-1)+1=2033$ egyenlőséget. Ekkor $2^n \cdot (k-1)=2032=2^4 \cdot 127$. **(1 pont)**
A k akkor a legkisebb, ha $n=4$, és ekkor $k-1=127$, tehát $k=128$, vagyis 2033 megjelölt pont elérhető $k=128$ megjelölt pontból kiindulva. **(2 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszög az A csúcsban derékszögű. A C középpontú és CA sugarú kör, valamint a B középpontú és BA sugarú kör a BC átfogót D, illetve E pontokban metszi. Az ADE háromszög köré írt kör az AB, illetve AC befogót az F, illetve G pontokban metszi. Számítsd ki az FG szakasz hosszát, tudva, hogy $AB=15$ cm és $AC=8$ cm!

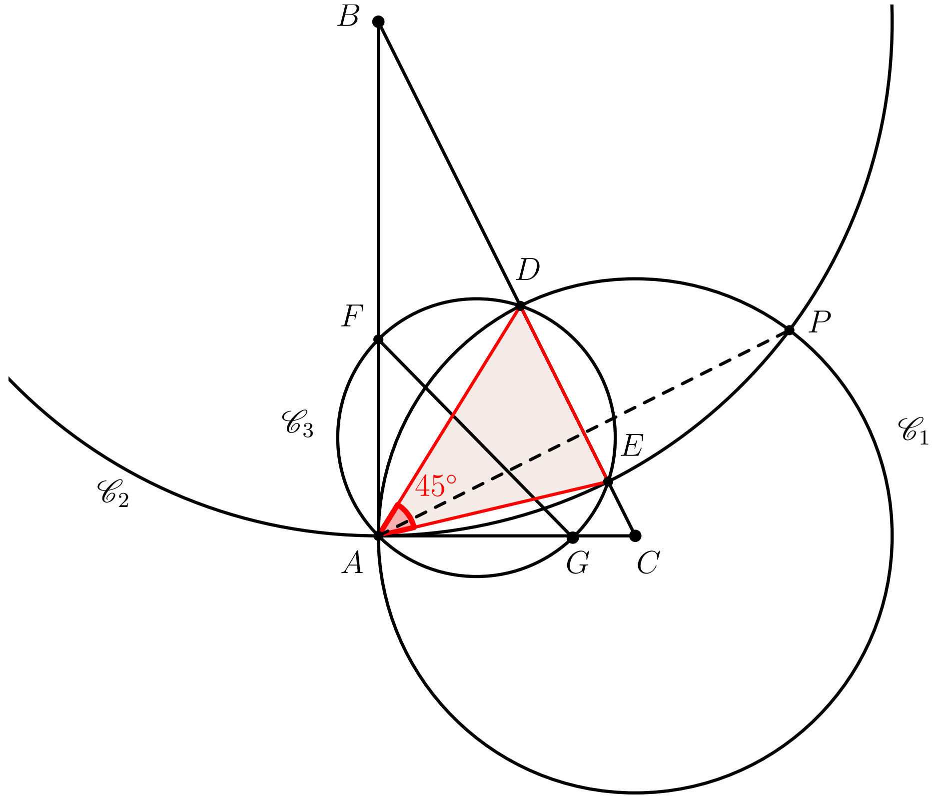
Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Jelöljük $\mathscr{C}_1$-gyel a CA sugarú kört, $\mathscr{C}_2$-vel a BA sugarú kört és $\mathscr{C}_3$-al az ADE háromszög köré írt kört. Legyen a $\mathscr{C}_1$ és a $\mathscr{C}_2$ második metszéspontja P.
Mivel két metsző kör metszéspontján áthaladó egyenes merőleges a két kör centrálisára, ezért teljesül, hogy $CB \perp AP$, ugyanakkor a $\mathscr{C}_2$ körön $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EP}$ és a $\mathscr{C}_1$ körön $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DP}$. **(2 pont)**
Mivel AC érintője a $\mathscr{C}_2$ körnek, ezért a

$$\widehat{CAE}=\frac{\overset{\frown}{AE}}{2}=\frac{\overset{\frown}{EP}}{2}=\widehat{PAE}=\frac{\overset{\frown}{PAC}}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\widehat{BAD} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{DP}}{2} = \widehat{DAP} = \frac{\overset{\frown}{BAP}}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$



Tehát a $\widehat{DAE} = \widehat{DAP} + \widehat{PAE} = \frac{\overset{\frown}{BAP}}{2} + \frac{\overset{\frown}{PAC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BAC}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. **(1 pont)**
Az $ABC\triangle$-ben $BC^2 = AC^2 + AB^2 = 289$, tehát $BC = 17$ cm. Továbbá

$$\begin{aligned} BE &= BA = 15 \text{ cm},\\ CD &= CA = 8 \text{ cm},\\ DE &= BE + CD - BC = 15 + 8 - 17 = 6 \text{ cm}. \end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az $AED\triangle$-ben alkalmazva a szinusztételt, azt kapjuk, hogy

$$R = \frac{DE}{2 \cdot \sin(DAE\measuredangle)} = \frac{6}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 3\sqrt{2} \text{ cm},$$

ahol R a $\mathscr{C}_3$ kör sugara. **(1 pont)**
Mivel $\widehat{FAG}$ derékszög, következik, hogy FG a $\mathscr{C}_3$ kör átmérője, amelynek hossza $2R = 6\sqrt{2}$ cm.
(1 pont)
■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az AGF háromszög derékszögű, ezért a GF az ADE háromszög köré írt kör átmérője. A CAD háromszög egyenlő szárú, így $CD = CA = 8$ cm és

$$CDA\measuredangle = CAD\measuredangle = \frac{180^\circ - C\measuredangle}{2}. \tag{1}$$

(1 pont)

A BAE háromszög egyenlő szárú, így $BE = BA = 15$ cm és

$$BEA\measuredangle = BAE\measuredangle = \frac{180^\circ - B\measuredangle}{2}. \tag{2}$$

(**1 pont**)

Az (1) és (2) összefüggésekből:

$$CDA\measuredangle + BAE\measuredangle = 90^\circ + DAE\measuredangle,$$

ahonnan következik, hogy $DAE\measuredangle = CDA\measuredangle + BAE\measuredangle - 90^\circ$. (**1 pont**)
Ekkor $DAE\measuredangle = \frac{180^\circ - C\measuredangle}{2} + \frac{180^\circ - B\measuredangle}{2} - 90^\circ$ vagyis $DAE\measuredangle = 90^\circ - \frac{C\measuredangle + B\measuredangle}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. (**2 pont**)
Az ABC derékszögű háromszögben, Pitagorasz tételével kiszámolva, kapjuk, hogy $BC = 17$ cm, így $DE = CD + BE - BC = 6$ cm. (**2 pont**)
Az ADE háromszögben felírva a szinusztételt:

$$\frac{DE}{\sin(DAE\measuredangle)} = 2R \iff \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R.$$ (**1 pont**)

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy $2R = 6\sqrt{2}$ cm. Tehát $FG = 6\sqrt{2}$ cm. (**1 pont**)

■

5. feladat (10 pont)**.** Oldd meg a nullától különböző természetes számok halmazán az $5^x - 1 = 2^y \cdot 3^z$ egyenletet! Ismertnek tekintjük, hogy a nullától különböző természetes számok halmazán a $2^x - 3^y = 1$ egyenletnek csak az $x = 2$ és $y = 1$ a megoldása, míg a $3^x - 2^y = 1$ egyenletnek csak az $x = y = 1$, valamint az $x = 2$ és $y = 3$ a megoldásai.

Bolyai János kézirata nyomán

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Ha x páratlan, akkor $x = 2n+1$ és akkor $5^x - 1 = 5^{2n+1} - 1 = 5 \cdot (6-1)^{2n} - 1 = 6 \cdot \mathcal{M} + 5 \cdot 1 - 1 = 6 \cdot \mathcal{M} + 4$. Tehát $5^x - 1$ nem osztható 3-mal, de $2^y \cdot 3^z$ osztható 3-mal, mert $z \geq 1$, tehát az egyenletnek nincs megoldása. (**1 pont**)
Ha x páros, akkor $x = 2n$ és az egyenlet a következő alakban írható:

$$(5^n - 1)(5^n + 1) = 2^y \cdot 3^z.$$

Mivel $(5^n - 1)$ és $(5^n + 1)$ egymásutáni páros számok ezért a legnagyobb közös osztójuk 2 és csak az alábbi esetek lehetségesek:

$$\begin{cases} 5^n - 1 = 2^k \cdot 3^a \\ 5^n + 1 = 2 \cdot 3^b \end{cases}, k \geq 1 \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 5^n - 1 = 2 \cdot 3^a \\ 5^n + 1 = 2^k \cdot 3^b \end{cases}, k \geq 1.$$ (**2 pont**)

Az első esetben $2 \cdot 3^b - 2^k \cdot 3^a = 2$ vagyis $3^b - 2^{k-1} \cdot 3^a = 1$.
Ha $a \geq 1$ és $b \geq 1$, akkor a bal oldal osztható 3-mal, tehát az egyenlőség nem lehetséges.
(**1 pont**)
Ha $b = 0$, akkor $2^{k-1} \cdot 3^a = 0$ szintén lehetetlen. (**1 pont**)
Ha $a = 0$, akkor $3^b - 2^{k-1} = 1$. Mivel a $3^x - 2^y = 1$ egyenletnek csak az $x = y = 1$ valamint az $x = 2$ és $y = 3$ a megoldásai, ezért $b = k - 1 = 1$ vagy $b = 2$ és $k - 1 = 3$.
Ha $b = 1$ és $k = 2$ akkor azt kapjuk, hogy $x = 2, y = 3$ és $z = 1$. (**1 pont**)

Ha $b = 2$ és $k = 4$, akkor nincs megoldás. **(1 pont)**
A második esetben $2^k \cdot 3^b - 2 \cdot 3^a = 2$ vagyis $2^{k-1} \cdot 3^b - 3^a = 1$. Ha $a = 0$, akkor $b = 0$ és nincs megoldás. **(1 pont)**
Ha $b = 0$, akkor $2^{k-1} - 3^a = 1$. Mivel a $2^x - 3^y = 1$ egyenletnek a nullától különböző természetes számok halmazán csak az $x = 2$ és $y = 1$ a megoldása, ezért $k - 1 = 2$, valamint $a = 1$. Ekkor $k = 3, a = 1$ és $5^n - 1 = 6$, ami lehetetlen.
Tehát az egyenlet egyetlen megoldása az $x = 2, y = 3$ és $z = 1$. **(1 pont)**

■

6. feladat (10 pont)**.** A valós számok halmazán oldd meg a

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \dfrac{2y}{y^2+1} \\ \dfrac{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}} = \dfrac{2x}{x^2+1} \end{cases}$$

egyenletrendszert! *Dávid Géza, Székelyudvarhely*

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az egyenletekben szereplő kifejezések akkor értelmezettek, ha $x, y \in [-1, 1]$.
Tekintsük az $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ függvényt. Igazoljuk, hogy az f szigorúan növekvő és szürjektív.
Legyen $-1 \leq x < y \leq 1$. Azt kell igazolni, hogy $\frac{2x}{x^2+1} < \frac{2y}{y^2+1}$, ami egyenértékű a következőkkel

$$\begin{aligned} & xy^2 + x < x^2y + y \\ \iff\ & xy^2 - x^2y + x - y < 0 \\ \iff\ & xy(y-x) - (y-x) < 0 \\ \iff\ & (y-x)\cdot(xy-1) < 0, \end{aligned}$$

ami igaz. **(1 pont)**
Legyen $y \in [-1, 1]$. Azt vizsgáljuk, hogy létezik-e $x \in [-1, 1]$ úgy, hogy $f(x) = y$, ami egyenértékű az $(x^2 + 1) \cdot y = 2x$ kifejezéssel, vagyis az $yx^2 - 2x + y = 0$ egyenlettel. Ha $y = 0$, akkor $x = 0$, illetve ha $y \neq 0$, akkor az előbbi egyenlet egyetlen $[-1, 1]$ intervallumba eső megoldása

$$x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}},$$

tehát az f szürjektív. **(1 pont)**
Mivel f szigorúan növekvő és szürjektív következik, hogy bijektív és

$$f^{-1}\colon [-1,1] \to [-1,1], \quad f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Most rátérünk az egyenletrendszer megoldására.
Az egyenletrendszer a következőképpen alakul:

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = f(y) \\ f^{-1}(y) = f(x) \end{cases}.$$

Feltételezzük, hogy $x < y \implies f(x) < f(y) \implies f^{-1}(y) < f^{-1}(x)$. Mivel f^{-1} is növekvő, következik, hogy $y < x$, ami ellentmondás. Tehát $x = y$. (**2 pont**)

Így $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ vagyis $f(x) = f^{-1}(x)$. (**1 pont**)

Mivel f szigorúan növekvő ezért az $f(x) = f^{-1}(x)$ egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $f(x) = x = f^{-1}(x)$, (**1 pont**)

vagyis $\frac{2x}{x^2+1} = x$, ami az $x^3 - x = 0 \iff x(x-1)(x+1) = 0$ egyenlettel egyenértékű.

Tehát $x = 0$ vagy $x = -1$ vagy $x = 1$. (**1 pont**)

Innen az következik, hogy a $(0,0)$, $(1,1)$ és a $(-1,-1)$ az egyenletrendszer megoldásai. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Ha $x = 0$ vagy $y = 0$, akkor az egyenletrendszer $(x,y) = (0,0)$. Tegyük fel, hogy $x, y \neq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} &= \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2} \\
&= \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} && (3) \\
&= \frac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}. && (4)
\end{aligned}$$

(**2 pont**)

A (3) és (4) alapján az egyenletrendszer első egyenletéből kapjuk, hogy

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{2y}{y^2+1} \quad \text{és} \quad \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{y^2+1}{2y}.$$

Ezeket összeadva kapjuk a

$$\frac{2}{x} = \frac{2y}{y^2+1} + \frac{y^2+1}{2y} \tag{5}$$

összefüggést. (**1 pont**)

Hasonlóan az egyenletrendszer második egyenletéből adódik, hogy

$$\frac{2}{y} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{2x}.$$ (**1 pont**)

Ezeket kivonva egymásból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{2y}{y^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{y^2+1}{2y} - \frac{x^2+1}{2x} \\
\iff\ & 2 \cdot \frac{y-x}{xy} = 2 \cdot \frac{yx^2+y-xy^2-x}{(x^2+1)(y^2+1)} + \frac{y^2x+x-yx^2-y}{2xy} \\
\iff\ & \frac{2(y-x)}{xy} = \frac{2(y-x)(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)} + \frac{(y-x)(-1+xy)}{2xy} \\
\iff\ & \frac{(y-x)(5-xy)}{2xy} = \frac{2(y-x)(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}.
\end{aligned}$$ (**1 pont**)

Ha $x \neq y$, akkor

$$\frac{5-xy}{2xy} = \frac{2(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)} \iff (5-xy)(x^2+1)(y^2+1) = 4(1-xy)xy.$$

Mivel $x, y \in [-1, 1]$, ezért $5 - xy \geq 4$, $1 + x^2 \geq 1$, $1 + y^2 \geq 1$, illetve $4(1-xy)xy \leq 1$, mivel az $f(u) = (1-u)u$ másodfokú függvény maximuma $\frac{1}{4}$. Tehát a fenti egyenlőség bal oldala nagyobb vagy egyenlő, mint 4, míg a jobb oldala kisebb vagy egyenlő mint 1, így a fenti egyenlőség nem teljesülhet semmilyen $x, y \in [-1, 1]$ számokra. **(2 pont)**

Ha $x = y$, akkor az (5) alapján kapjuk

$$\frac{2}{x} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{2x} \iff 4(x^2+1) = 4x^2 + (x^2+1)^2 \iff x^4 + 2x^2 - 3 = 0.$$

Mivel a $v^2 + 2v - 3 = 0$ egyenlet két megoldása $v = 1$ és $v = 3$, ezért $x^2 = 1$. Tehát, ha $x, y \neq 0$, akkor az egyenletrendszer megoldásai $(x, y) = (-1, -1)$ és $(x, y) = (1, 1)$. **(2 pont)**

■