V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$[x]^2 + \left(\left\{x + \frac{1}{2023}\right\} - 1\right)\left(x + \frac{2024}{2023} - \left[x + \frac{1}{2023}\right]\right) = 2024$$

egyenletet, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét, $\{a\}$ pedig a tört részét jelöli!

2. feladat. Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben az AFE háromszög súlypontját jelölje G. Továbbá legyen M az FE szakasz azon pontja, amelyre $\frac{FM}{ME} = k$, ahol $k > 0$.

a) Fejezd ki a $\overrightarrow{BF}$ és $\overrightarrow{BE}$ vektorokat a $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ vektorok segítségével!

b) Határozd meg a $k > 0$ értékét úgy, hogy a B, G és M pontok kollineárisak legyenek!

3. feladat. Igazold, hogy az $a, b, c > 0$ számok esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{3}{2}(a+b+c) \leq \frac{2a^2+ab}{a+b} + \frac{2b^2+bc}{b+c} + \frac{2c^2+ca}{c+a} \leq 2(a+b+c).$$

4. feladat. Az ABC nem egyenlő szárú háromszög köré írt középpontját jelölje O, magasságpontját pedig H. Legyen O' a HBC háromszög köré írt kör középpontja. Igazold, hogy az $AHO'O$ négyszög egy paralelogramma.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.