# V. Országos Magyar Matematikaolimpia
# XXXII. EMMV
**országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.**

## IX. osztály – II. forduló

**1. feladat.**

a) Igazold, hogy az 5-nél nagyobb prímszámok $6k+1$ vagy $6k+5$ alakúak, ahol $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Határozd meg azokat az $a$ és $b$ prímszámokat, amelyekre $a+2b$ és $a+7b$ egyszerre prímek!

**2. feladat.** Legyen $C$ egy adott $AB$ szakasz felezőpontja, $D$ pedig a $BC$ szakasz felezőpontja. Ugyanakkor legyen $E$ a $B$ középpontú, $BC$ sugarú kör, $C$-től különböző tetszőleges pontja. Jelölje $F$ az $E$ pontnak a $D$ pont szerinti szimmetrikusát. Bizonyítsd be, hogy $EA = EF$.

**3. feladat.** Igazold, hogy bármely $n$ természetes szám esetén $(5-\sqrt{5})^n + (5+\sqrt{5})^n$ osztható $2^n$-nel!

**4. feladat.** A táblára felírtuk a természetes számokat 1-től $n$-ig. Minden lépésben kitörlünk két tetszőleges $a$ és $b$ számot, helyette felírjuk az $a+b-n$ számot. Határozd meg az $(n,k)$ számpárokat úgy, hogy $k$ lépés után a táblán maradt számok összege 2023 legyen!

**5. feladat.** Határozd meg az $a$, $b$, $c$ nullától különböző természetes számokat, ha tudjuk, hogy páronként relatív prímek és $3a+4b+5c = 5\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$.

**6. feladat.** Az $ABCD$ négyzetben legyen $P$ az $AD$ oldal felezőpontja, valamint $AR \perp BP$ és $CS \perp BP$, ahol $R$, $S \in BP$ és $CS \cap AB = \{Q\}$. Igazold, hogy:

a) $\dfrac{AR}{CS} = \dfrac{1}{2}$;

b) $CR = DS = AB$;

c) $\dfrac{T_{ARSQ}}{T_{ABCD}} = \dfrac{3}{20}$.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.