CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Oldd meg a valós számok halmazán az

$$[x]^2+\left(\left\{x+\frac{1}{2023}\right\}-1\right)\left(x+\frac{2024}{2023}-\left[x+\frac{1}{2023}\right]\right)=2024$$

egyenletet, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét, $\{a\}$ pedig a tört részét jelöli!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Észrevesszük, hogy

$$x+\frac{2024}{2023}-\left[x+\frac{1}{2023}\right]=x+\frac{1}{2023}-\left[x+\frac{1}{2023}\right]+1=\left\{x+\frac{1}{2023}\right\}+1.$$ (**2 pont**)

Ez alapján az egyenlet egyenértékű azzal, hogy

$$[x]^2+\left(\left\{x+\frac{1}{2023}\right\}-1\right)\left(\left\{x+\frac{1}{2023}\right\}+1\right)=2024$$

$$\iff [x]^2+\left\{x+\frac{1}{2023}\right\}^2=2025.$$ (**2 pont**)

Ez utóbbi egyenlet csak akkor teljesülhet, ha $\left\{x+\frac{1}{2023}\right\}$ egész szám. Másrészt $\left\{x+\frac{1}{2023}\right\}\in[0,1)$, tehát $\left\{x+\frac{1}{2023}\right\}=0$ kell legyen. (**2 pont**)

Ezek alapján azt kapjuk, hogy $[x]^2=2025$, ahonnan $[x]=45$ vagy $[x]=-45$. (**1 pont**)

Ha $[x]=45$ és $\left\{x+\frac{1}{2023}\right\}=0$, akkor $x=46-\frac{1}{2023}$.

Ha $[x]=-45$ és $\left\{x+\frac{1}{2023}\right\}=0$, akkor $x=-44-\frac{1}{2023}$. Tehát a megoldások halmaza

$$M=\left\{46-\frac{1}{2023},-44-\frac{1}{2023}\right\}.$$ (**2 pont**)

■

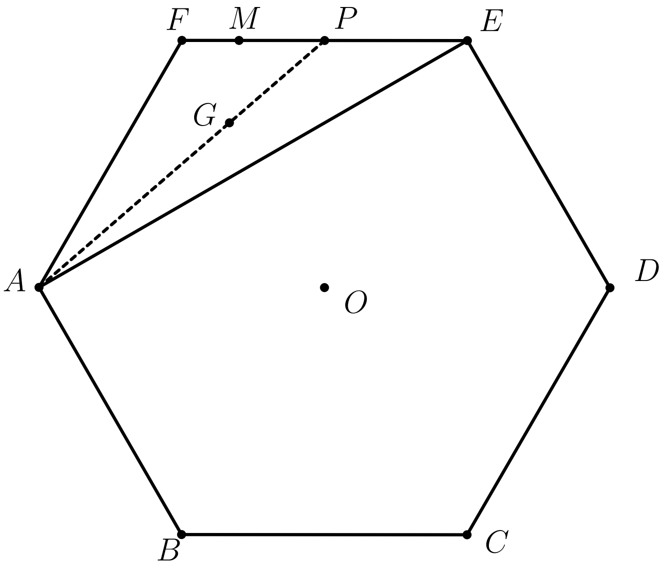
2. feladat (10 pont)**.** Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben az AFE háromszög súlypontját jelölje G. Továbbá legyen M az FE szakasz azon pontja, amelyre $\dfrac{FM}{ME}=k$, ahol $k>0$.

a) Fejezd ki a $\overrightarrow{BF}$ és $\overrightarrow{BE}$ vektorokat a $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$ és $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ vektorok segítségével!

b) Határozd meg a $k>0$ értékét úgy, hogy a B, G és M pontok kollineárisak legyenek!

Máténfi István, Marosvásárhely
Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Legyen O a hatszög középpontja, valamint P az FE szakasz felezőpontja. Ekkor

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + \overrightarrow{BO} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{a} + \vec{b}.$$

$$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BO} = 2(\vec{a} + \vec{b}).$$ **(2 pont)**

b) A B, G és M pontok akkor és csakis akkor kollineárisak, ha létezik $p \in \mathbb{R}^*$, amelyre teljesül, hogy $\overrightarrow{BM} = p \cdot \overrightarrow{BG}$. **(1 pont)**
Mivel G az AFE háromszög súlypontja, ezért $\frac{AG}{GP} = 2$. Ez alapján írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BE}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}(4\vec{a} + 3\vec{b}) = \frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b}.$$ **(2 pont)**

Továbbá $\frac{FM}{ME} = k$, így

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{BF} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BE} = \frac{1}{k+1}(2\vec{a} + \vec{b}) + \frac{k}{k+1}(2\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} + \frac{1+2k}{k+1}\vec{b}$$ **(2 pont)**

A $\overrightarrow{BM} = p \cdot \overrightarrow{BG}$ egyenlőség alapján $\frac{5}{3}p = 2$ és $p = \frac{1+2k}{k+1}$, **(1 pont)**
ahonnan azt kapjuk, hogy $k = \frac{1}{4}$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy az $a, b, c > 0$ számok esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{3}{2}(a+b+c) \leq \frac{2a^2+ab}{a+b} + \frac{2b^2+bc}{b+c} + \frac{2c^2+ca}{c+a} \leq 2(a+b+c).$$

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen

$$\begin{aligned} S &= \frac{2a^2+ab}{a+b}+\frac{2b^2+bc}{b+c}+\frac{2c^2+ca}{c+a} \\ &= \frac{a^2+a(a+b)}{a+b}+\frac{b^2+b(b+c)}{b+c}+\frac{c^2+c(c+a)}{c+a} \\ &= a+b+c+\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}. \end{aligned}$$ **(2 pont)**

Az $S \leq 2(a+b+c)$ egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \leq a+b+c,$$

ahonnan

$$\frac{-ab}{a+b}+\frac{-bc}{b+c}+\frac{-ac}{a+c} \leq 0,$$

ami teljesül minden $a,b,c>0$ esetén. **(3 pont)**

Az $S \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$ egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

A Bergström-egyenlőtlenség (vagy Titu-lemma) alapján

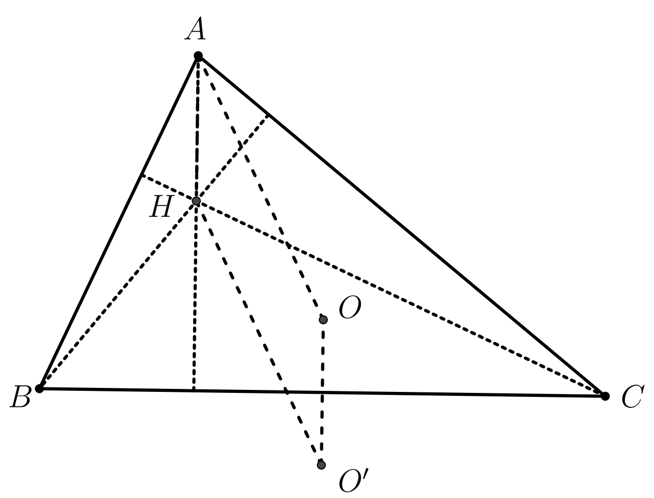
$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+b+c+c+a} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}(a+b+c).$$ **(4 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Az ABC nem egyenlő szárú háromszög köré írt középpontját jelölje O, magasságpontját pedig H. Legyen O' a HBC háromszög köré írt kör középpontja. Igazold, hogy az $AHO'O$ négyszög egy paralelogramma.

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Az ABC háromszögben a Sylvester-tétel alapján $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. (**2 pont**)
Mivel $AH \perp BC$ és $AB \perp HC$, ezért az A pont a HBC háromszög ortocentruma. (**2 pont**)
A HBC háromszögben a Sylvester-tétel alapján

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'A} &= \overrightarrow{O'H} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C}\\ &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC}\\ &= 3\overrightarrow{O'O} + 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$ (**2 pont**)

Másrészt $\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}$, tehát $3\overrightarrow{O'O} + 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}$, (**2 pont**)
ahonnan az következik, hogy $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OH}$, azaz $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'H}$. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $AHO'O$ négyszög egy paralelogramma. (**1 pont**)

■