V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont)**.**

a) Igazold, hogy az 5-nél nagyobb prímszámok $6k+1$ vagy $6k+5$ alakúak, ahol $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Határozd meg azokat az a és b prímszámokat, amelyekre $a+2b$ és $a+7b$ egyszerre prímek!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén a $6k$, $6k+2$ és $6k+4$ alakú természetes számok oszthatók 2-vel, a $6k+3$ alakú számok pedig oszthatók 3-mal, tehát ezek nem lehetnek prímszámok. **(1 pont)**
Így az 5-nél nagyobb prímszámok $6k+1$ vagy $6k+5$ alakúak, ahol $k \in \mathbb{N}^*$. **(1 pont)**

b) Ha az a és b számok páratlanok, akkor $a+7b$ páros, így nem lehet prímszám, tehát az a és b számok közül legalább az egyik páros kell legyen, azaz $a=2$ vagy $b=2$. **(1 pont)**
Ha $a=2$, akkor $a+2b=2+2b$ páros, tehát nem prímszám. **(1 pont)**
Ha $b=2$ és $a \neq 2$, akkor keressük azokat az a prímszámokat, amelyekre $a+4$ és $a+14$ egyszerre prímek. Ebben az esetben a következő aleseteket tárgyaljuk:

- ha $a=3$, akkor $a+4=7$ és $a+14=17$, mindkettő prímszám, **(1 pont)**
- ha $a=5$, akkor $a+4=9$, ami nem prímszám, **(1 pont)**
- ha $a=6k+1$, akkor $a+14=3(2k+5)$, ami nem prímszám, **(1 pont)**
- ha $a=6k+5$, akkor $a+4=3(2k+3)$, de ez sem prímszám. **(1 pont)**

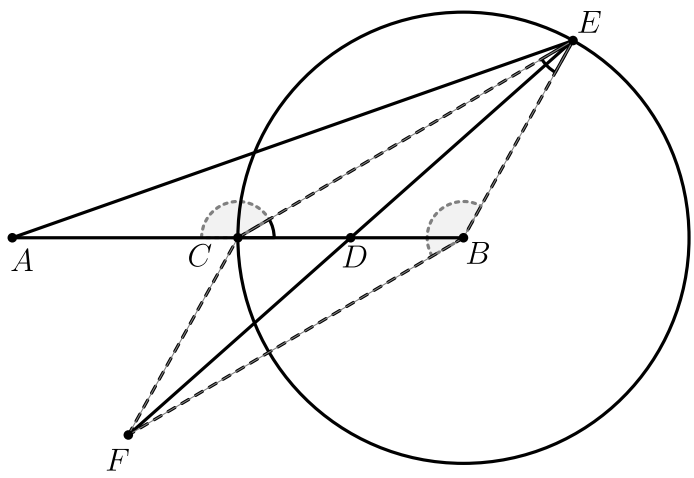
Tehát a keresett számok: $a=3$ és $b=2$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Legyen C egy adott AB szakasz felezőpontja, D pedig a BC szakasz felezőpontja. Ugyanakkor legyen E a B középpontú, BC sugarú kör, C-től különböző tetszőleges pontja. Jelölje F az E pontnak a D pont szerinti szimmetrikusát. Bizonyítsd be, hogy $EA=EF$.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

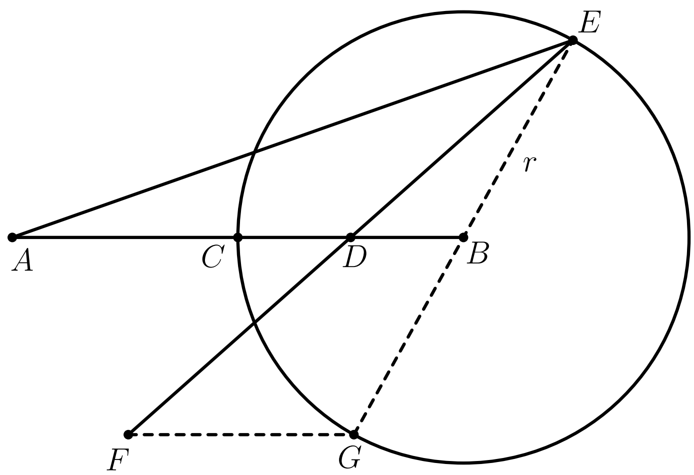
Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Mivel F az E pontnak a D pont szerinti szimmetrikusa, ezért $ED = DF$.
Ugyanakkor $DB = DC$, így $BECF$ paralelogramma és $\widehat{BEC} + \widehat{FBE} = 180°$. **(3 pont)**
De $\widehat{BEC} \equiv \widehat{BCE}$, mert a BEC háromszög egyenlő szárú, így
$\widehat{ACE} = 180° - \widehat{ECB} = 180° - \widehat{BEC} = \widehat{FBE}$. **(3 pont)**
Az ACE és EBF háromszögekben $AC = EB$, mert $AC = CB = EB$, továbbá $CE = BF$, mert $BECF$ paralelogramma, végül $\widehat{ACE} \equiv \widehat{FBE}$. **(2 pont)**
Ezek alapján $ACE_{\triangle} \equiv EBF_{\triangle}$, ahonnan $AE = EF$. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Legyen G az E pont átmérősen ellentett pontja. **(1 pont)**
Ha r a kör sugara, akkor $BE = BG = BC = r$, $AB = 2r$ és $EG = 2r$, tehát $AB = EG$. **(2 pont)**
Az $EFG_{\triangle}$-ben $ED = DF$ és $EB = BG$, ezért DB az $EFG_{\triangle}$ középvonala, így
$FG = 2DB = BC = r$, tehát $FG = BE$, **(3 pont)**
ugyanakkor $DB \parallel FG$, ezért $\widehat{ABE} \equiv \widehat{EGF}$. **(2 pont)**
A fentiek alapján $AB = EG$, $FG = BE$, valamint $\widehat{ABE} \equiv \widehat{EGF}$, amiből következik, hogy az ABE és EGF háromszögek kongruensek, tehát $EA = EF$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy bármely n természetes szám esetén $(5-\sqrt{5})^n + (5+\sqrt{5})^n$ osztható 2^n-nel!

Kocsis Attila, Déva
Bara Lajos, Zilah

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen $P(n) : (5-\sqrt{5})^n + (5+\sqrt{5})^n \,\vdots\, 2^n$, ahol $n \in \mathbb{N}$. Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $P(n)$ igaz kijelentés, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

I. Ellenőrizzük az $n = 0$ és $n = 1$ sajátos eseteket: $P(0) : 2 \,\vdots\, 2^0$, $P(1) : 10 \,\vdots\, 2^1$, ami igaz. **(2 pont)**

II. Feltételezzük, hogy a $P(k-1)$ és a $P(k)$ kijelentések igazak, ezért léteznek olyan m_1 és m_2 természetes számok, amelyekre

$$(5-\sqrt{5})^{k-1} + (5+\sqrt{5})^{k-1} = 2^{k-1} \cdot m_1 \quad \text{és} \quad (5-\sqrt{5})^k + (5+\sqrt{5})^k = 2^k \cdot m_2.$$

Bizonyítjuk, hogy $P(k+1)$ kijelentés is igaz, vagyis $(5-\sqrt{5})^{k+1} + (5+\sqrt{5})^{k+1} \,\vdots\, 2^{k+1}$. **(2 pont)**

Az $a = 5-\sqrt{5}$ és $b = 5+\sqrt{5}$ jelölések alapján

$$\begin{aligned} a^{k+1} + b^{k+1} &= (a^k + b^k)(a+b) - ab(a^{k-1} + b^{k-1}) \\ &= 10 \cdot 2^k \cdot m_2 - 20 \cdot 2^{k-1} \cdot m_1 \\ &= 5 \cdot 2^{k+1} \cdot m_2 - 5 \cdot 2^{k+1} \cdot m_1 \\ &= 2^{k+1} \cdot 5 \cdot (m_2 - m_1) \,\vdots\, 2^{k+1}. \end{aligned}$$

(4 pont)

Tehát $(5-\sqrt{5})^n + (5+\sqrt{5})^n \,\vdots\, 2^n$, bármely n természetes szám esetén. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** A táblára felírtuk a természetes számokat 1-től n-ig. Minden lépésben kitörlünk két tetszőleges a és b számot, helyette felírjuk az $a+b-n$ számot. Határozd meg az (n,k) számpárokat úgy, hogy k lépés után a táblán maradt számok összege 2023 legyen!

Kocsis Attila, Déva
Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Felírtuk a táblára a számokat 1-től n-ig. Ezek összege: $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. **(1 pont)**

Ha két tetszőleges számot – a-t és b-t – letöröljük, majd helyette visszaírjuk az $a+b-n$ számot, az összeg minden lépésben n-nel csökken, így k lépés után, ahol $k \in \mathbb{N}^*$, az összeg $k \cdot n$-nel csökken. **(2 pont)**

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} - k \cdot n &= 2023 \quad | \cdot 2 \\ n(n+1) - 2kn &= 4046 \\ n(n+1-2k) &= 4046 \end{aligned}$$

(1 pont)

Mivel $4046 = 2 \cdot 7 \cdot 17^2$ és osztóinak száma $(1+1)(1+1)(2+1) = 12$, valamint az n természetes szám egyenlő kell legyen 4046 valamely osztójával, felírjuk az osztók halmazát.

$$D_{4046} = \{1, 2, 7, 14, 17, 34, 119, 238, 289, 578, 2023, 4046\}$$ **(1 pont)**

Ha $n = 4046$, akkor $4046 + 1 - 2k = 1$, ahonnan $2k = 4046$, tehát $k = 2023 \in \mathbb{N}^*$

Ha $n = 2023$, akkor $2023 + 1 - 2k = 2$, ahonnan $2k = 2022$, tehát $k = 1011 \in \mathbb{N}^*$

Ha $n = 578$, akkor $578 + 1 - 2k = 7$, ahonnan $2k = 572$, tehát $k = 286 \in \mathbb{N}^*$

Ha $n = 289$, akkor $289 + 1 - 2k = 14$, ahonnan $2k = 276$, tehát $k = 138 \in \mathbb{N}^*$

Ha $n = 238$, akkor $238 + 1 - 2k = 17$, ahonnan $2k = 222$, tehát $k = 111 \in \mathbb{N}^*$

Ha $n = 119$, akkor $119 + 1 - 2k = 34$, ahonnan $2k = 86$, tehát $k = 43 \in \mathbb{N}^*$ **(2 pont)**

Mivel $n+1-2k \leq n-1 < n$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ és $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ezért elégséges a fenti esetek tárgyalása. **(1 pont)**

Tehát 6 olyan n természetes szám van, amelyre k lépés után a táblán maradt számok összege 2023. Ezek a következők:

$n = 4046$ esetén a táblán $1, 2, 3, \ldots, 4046$ szerepel, és $k = 2023$ lépés után az összeg 2023.

$n = 2023$ esetén a táblán $1, 2, 3, \ldots, 2023$ szerepel, és $k = 1011$ lépés után az összeg 2023.

$n = 578$ esetén a táblán $1, 2, 3, \ldots, 578$ szerepel, és $k = 286$ lépés után az összeg 2023.

$n = 289$ esetén a táblán $1, 2, 3, \ldots, 289$ szerepel, és $k = 138$ lépés után az összeg 2023.

$n = 238$ esetén a táblán $1, 2, 3, \ldots, 238$ szerepel, és $k = 111$ lépés után az összeg 2023.

$n = 119$ esetén a táblán $1, 2, 3, \ldots, 119$ szerepel, és $k = 43$ lépés után az összeg 2023.

A megoldások: $(n, k) \in \{(119, 43), (238, 111), (289, 138), (578, 286), (2023, 1011), (4046, 2023)\}$. **(1 pont)**

■

5. feladat (10 pont)**.** Határozd meg az a, b, c nullától különböző természetes számokat, ha tudjuk, hogy páronként relatív prímek és $3a + 4b + 5c = 5\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A 3, 4, 5, valamint az a, b, c pozitív természetes számokra alkalmazva a Cauchy–Bunyakovskij–Schwarz-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $(3a+4b+5c)^2 \leq (3^2+4^2+5^2)(a^2+b^2+c^2) = 50(a^2+b^2+c^2)$, ahonnan $3a + 4b + 5c \leq 5\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$. **(5 pont)**
Ebben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$. **(2 pont)**
Mivel a, b és c természetes számok, ezért létezik olyan nem nulla k természetes szám, amelyre $a = 3k$, $b = 4k$ és $c = 5k$. **(1 pont)**
Ugyanakkor a, b és c relatív prímek, ezért $k = 1$, így $a = 3$, $b = 4$ és $c = 5$. **(1 pont)**
■

6. feladat (10 pont)**.** Az $ABCD$ négyzetben legyen P az AD oldal felezőpontja, valamint $AR \perp BP$ és $CS \perp BP$, ahol R, $S \in BP$ és $CS \cap AB = \{Q\}$. Igazold, hogy:

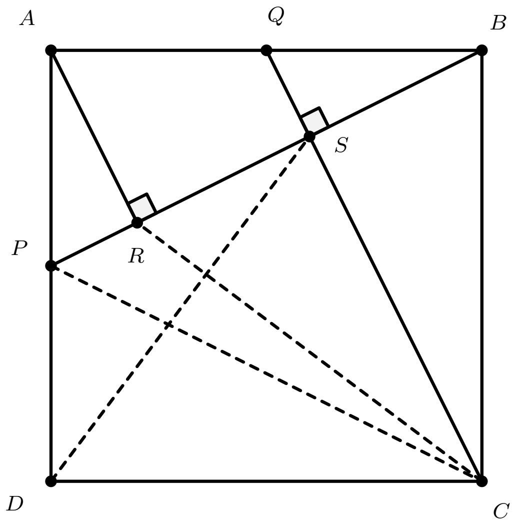
a) $\dfrac{AR}{CS} = \dfrac{1}{2}$;

b) $CR = DS = AB$;

c) $\dfrac{T_{ARSQ}}{T_{ABCD}} = \dfrac{3}{20}$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) A szög-szög hasonlósági eset alapján a BSQ, CSB és CBQ háromszögek hasonlóak, valamint a BSQ, BRA, ARP és BAP háromszögek is hasonlóak. Tehát mind a hat háromszög hasonló. **(1 pont)**

Az ARP és CSB háromszögek hasonlóságából felírható, hogy:

$$\frac{AR}{CS} = \frac{RP}{SB} = \frac{PA}{BC} = \frac{PA}{2PA} = \frac{1}{2}.$$

Tehát

$$\frac{AR}{CS} = \frac{1}{2}.$$ **(1 pont)**

b) Az a) alpontból tudjuk, hogy BAP és CBQ háromszögek hasonlóak, vagyis

$$\frac{BA}{CB} = \frac{AP}{BQ} = \frac{PB}{QC} = 1.$$

Ebből következik, hogy $AP = BQ$, ahonnan Q az AB felezőpontja. Így, mivel $SQ \parallel AR$, a kettő alapján következik, hogy QS középvonal a BAR háromszögben, vagyis S a BR szakasz felezőpontja. **(1 pont)**

Mivel $RS = SB$ valamint a BCR háromszögben a CS magasság is, ezért a BCR háromszög egyenlő szárú, azaz $BC = CR$, vagyis $CR = AB$. **(1 pont)**

Az $a)$ alpontból tudjuk, hogy CSB és BRA háromszögek hasonlóak, azaz

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CS}{BR} = \frac{SB}{RA} = 1.$$

Tehát $CS = BR$ és $SB = RA$. **(1 pont)**

Mivel a $\widehat{BCS}$ szögnek a $\widehat{CBS}$ és $\widehat{SCD}$ is pótszöge, ezért $\widehat{CBS} = \widehat{SCD}$. Ekkor, ha tekintjük a BCR és CDS háromszögeket, ezekben $\widehat{CBR} = \widehat{SCD}$, ezenkívül $DC = BC$ és $SC = RB$, így a két háromszög kongruens. Innen $CR = DS$, de $CR = AB$ tehát $CR = DS = AB$. **(1 pont)**

c) Legyen $AB = 4x$. Ekkor $T_{ABCD} = (4x)^2 = 16x^2$.
A BAR háromszögben QS középvonal, tehát $QS = \frac{AR}{2}$, de $AR = \frac{CS}{2}$, vagyis $QS = \frac{CS}{4}$. **(1 pont)**

Tudjuk, hogy $RS = SB = RA = 2QS$.
$T_{ARSQ} = \frac{SQ+AR}{2} \cdot RS = \frac{SQ+2SQ}{2} \cdot 2SQ = 3SQ^2$. **(1 pont)**

A BCQ háromszögben alkalmazva a Pitagorasz-tételt kapjuk, hogy $QC = 2\sqrt{5} \cdot x$.
Tehát $QS = \frac{1}{5}QC = \frac{1}{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot x$, ahonnan $T_{ARSQ} = 3SQ^2 = \frac{12}{5}x^2$.
Mindezeket felhasználva

$$\frac{T_{ARSQ}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{12}{5}x^2}{16x^2} = \frac{3}{20}$$ **(1 pont)**

■