

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

VIII. osztály

1. feladat. Lehet-e különböző pozitív egész számokat írni egy tetraéder éleire úgy, hogy az egy-egy csúcsban összefutó három élen levő számok szorzata ugyanannyi legyen?

2. feladat. a) Oldd meg az egész számok halmazában az $x^2 - xy + 45y = 2023$ egyenletet!

b) Milyen x és y egész számok esetén lesz az

$$E(x, y) = \frac{(4x - 3y)(3x - 4y)}{x^2y^2 + 1}$$

kifejezés a lehető legkisebb?

3. feladat. a) Igazold, hogy bármely x és y pozitív valós számok esetén

$$\sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 \leq \frac{x+y}{2}.$$

b) Igazold, hogy bármely x , y és z pozitív valós számok esetén

$$\sqrt{x(y+1)} + \sqrt{y(z+1)} + \sqrt{z(x+1)} \leq \frac{3}{2} \sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

4. feladat. Az $ABCD A' B' C' D'$ téglatestben O az $ABCD$, E pedig az $ADD' A'$ lap középpontja. Legyen $C' E \cap AB = \{N\}$ és $C' O \cap AA' = \{M\}$.

a) Igazold, hogy $MN \parallel D' C$.

b) Ha $AB = AA'$, igazold, hogy az $MND' C$ négyszög téglalap!

c) Ha $ABCD A' B' C' D'$ kocka, határozd meg az AND' és AMC síkok által alkotott szög mértékét!