V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

VIII. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Lehet-e különböző pozitív egész számokat írni egy tetraéder éleire úgy, hogy az egy-egy csúcsban összefutó három élen levő számok szorzata ugyanannyi legyen? *(***)*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyenek az élekre írt pozitív egész számok a, b, c, d, e és f. Ekkor a feltételnek megfelelően kapjuk, hogy $abc = cde = aef = bdf$. **(1 pont)**
Elosztva az $abc = cde$ egyenlőség mindkét oldalát c-vel, következik, hogy $ab = de$. **(1 pont)**
Elosztva az $aef = bdf$ egyenlőség mindkét oldalát f-el, következik, hogy $ae = bd$. **(1 pont)**
Összeszorozva az $ab = de$ és $ae = bd$ egyenlőségeket, kapjuk, hogy $a^2be = bd^2e$, **(2 pont)**
majd mindkét oldalát elosztva be-vel, következik, hogy $a^2 = d^2$. **(1 pont)**
Mivel a és d pozitív egész számok, ezért $a = d$. Ekkor $b = e$ és $c = f$, **(2 pont)**
tehát *nem lehet* a feltételnek megfelelően különböző pozitív egész számokat írni egy tetraéder éleire. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** a) Oldd meg az egész számok halmazában az $x^2 - xy + 45y = 2023$ egyenletet!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

b) Milyen x és y egész számok esetén lesz az

$$E(x, y) = \frac{(4x - 3y)(3x - 4y)}{x^2y^2 + 1}$$

kifejezés a lehető legkisebb?

Jakab-Medvessi Andrea-Alice, Kolozsvár
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Máthé Attila István, Sepsiszentgyörgy

a) Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az egyenletet az $y(45 - x) = 2023 - x^2$ alakra hozzuk.
Ha $x = 45$, akkor $x^2 = 2023$, ami nem lehetséges. Ha $x \neq 45$, akkor $y = \frac{2023-x^2}{45-x}$. **(1 pont)**
Továbbá $y = \frac{x^2-2023}{x-45} = \frac{x^2-2025+2}{x-45} = \frac{(x+45)(x-45)+2}{x-45} = x + 45 + \frac{2}{x-45}$. **(1 pont)**
Mivel $\frac{2}{x-45}$ csak egész szám lehet, ezért a tört nevezője csak ±1 vagy ±2 lehet. **(1 pont)**
Összesen négy esetet kell vizsgálni.
Ha $x = 44$, akkor $y = 87$.
Ha $x = 46$, akkor $y = 93$.
Ha $x = 43$, akkor $y = 87$.
Ha $x = 47$, akkor $y = 93$. **(2 pont)**
Ezek a számpárok az egyenlet egész megoldásai. ■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az egyenletet rendezzük, majd a bal oldalon szorzatot alakítunk ki:
$x^2 - xy + 45y = 2023 \Leftrightarrow x^2 - 2025 - y(x-45) = -2$, azaz $(x-45)(x+45) - y(x-45) = -2$,
így $(x-45)(x+45-y) = -2$, **(2 pont)**
ahonnan az $x - 45 = \pm 1$, illetve $x - 45 = \pm 2$ eseteket kell tárgyalni. **(1 pont)**
Ugyanazokat a megoldásokat kapjuk, mint a fenti esetben. **(2 pont)**

b) Az $E(x,y)$ kifejezést átalakítjuk, azaz

$$E(x,y) = \frac{12x^2 - 16xy - 9xy + 12y^2}{x^2y^2+1} = \frac{12x^2 - 24xy + 12y^2 - xy}{x^2y^2+1}$$
$$= \frac{12(x-y)^2 - xy}{x^2y^2+1} \geq \frac{-xy}{x^2y^2+1} \geq -\frac{1}{2},$$ **(2 pont)**

mert $\frac{-xy}{x^2y^2+1} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{xy}{x^2y^2+1} \Leftrightarrow 1 + x^2y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (xy-1)^2 \geq 0$, ami igaz bármely x és y valós számok esetén. **(1 pont)**
Tehát az $E(x,y)$ kifejezés lehető legkisebb értéke $-\frac{1}{2}$, amelyet $xy = 1$ esetén ér el, azaz $x = y = 1$ vagy $x = y = -1$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** a) Igazold, hogy bármely x és y pozitív valós számok esetén

$$\sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 \leq \frac{x+y}{2}.$$

b) Igazold, hogy bármely x, y és z pozitív valós számok esetén

$$\sqrt{x(y+1)} + \sqrt{y(z+1)} + \sqrt{z(x+1)} \leq \frac{3}{2}\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Először igazoljuk, hogy bármely $x, y \in (0;\infty)$ esetén $\sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1$.
$\sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)} \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{xy} + xy \leq 1 + x + y + xy \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq x + y$, ami igaz a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján. **(2 pont)**
A $\sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 \leq \frac{x+y}{2}$ egyenlőtlenség ekvivalens a következőkkel:
$\sqrt{(1+x)(1+y)} \leq \frac{x+y}{2} + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x+y+xy} \leq x + y + 2$, amely egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve kapjuk, hogy
$4(1+x+y+xy) \leq x^2 + y^2 + 4 + 2xy + 4x + 4y \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$, ami igaz bármely $x, y \in (0;\infty)$ esetén. **(2 pont)**

b) A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{z+1}} \leq \frac{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{z+1}}{2},$$

$$\sqrt{\frac{y}{y+1}\cdot\frac{1}{x+1}} \leq \frac{\frac{y}{y+1}+\frac{1}{x+1}}{2},$$
$$\sqrt{\frac{z}{z+1}\cdot\frac{1}{y+1}} \leq \frac{\frac{z}{z+1}+\frac{1}{y+1}}{2}.$$

(**2 pont**)

A fenti egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}}+\sqrt{\frac{y}{(y+1)(x+1)}}+\sqrt{\frac{z}{(z+1)(y+1)}} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{z}{z+1}+\frac{1}{z+1}\right)=\frac{3}{2}.$$

(**2 pont**)

A $\sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}}+\sqrt{\frac{y}{(y+1)(x+1)}}+\sqrt{\frac{z}{(z+1)(y+1)}} \leq \frac{3}{2}$ egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva a $\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}$ kifejezéssel, a kért egyenlőtlenséghez jutunk. (**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont)**.** Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestben O az $ABCD$, E pedig az $ADD'A'$ lap középpontja. Legyen $C'E \cap AB = \{N\}$ és $C'O \cap AA' = \{M\}$.

a) Igazold, hogy $MN \parallel D'C$.

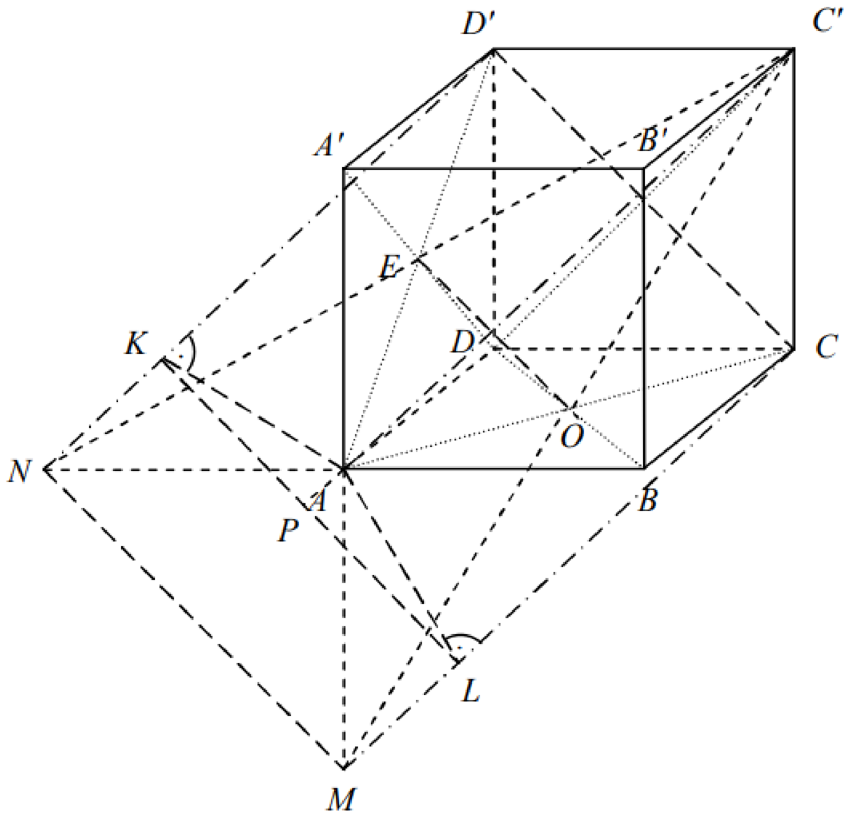
b) Ha $AB = AA'$, igazold, hogy az $MND'C$ négyszög téglalap!

c) Ha $ABCDA'B'C'D'$ kocka, határozd meg az AND' és AMC síkok által alkotott szög mértékét!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Az $NAE_\triangle \equiv C'D'E_\triangle$, mert $EA = ED'$, $\widehat{AEN} = \widehat{D'EC'}$ és $\widehat{NAE} = \widehat{C'D'E}$, ahonnan következik, hogy $EN = EC'$ és $AN = D'C'$. (**1 pont**)
Ugyanígy $MAO_\triangle \equiv C'CO_\triangle$, ahonnan következik, hogy $OM = OC'$ és $AM = CC'$.
Mivel $EN = EC'$ és $OM = OC'$, így az EO a $C'NM$ háromszög középvonala, tehát $EO \parallel MN$. (**1 pont**)
Az ACD' háromszögben EO középvonal, tehát $EO \parallel D'C$. (**0,5 pont**)
Az $EO \parallel MN$ és $EO \parallel D'C$ alapján következik, hogy $MN \parallel D'C$. (**0,5 pont**)



b) Az $AMN_{\triangle} \equiv DD'C_{\triangle}$, mert $AM = DD'$, $AN = DC$ és $\widehat{MAN} = \widehat{D'DC}$, tehát $MN = D'C$. **(0,5 pont)**

Mivel $MN \parallel D'C$, következik, hogy $MND'C$ paralelogramma. **(0,5 pont)**

Legyen $AB = AA' = a$ és $AD = b$. Kiszámítjuk a $D'NC$ háromszög oldalainak hosszát az a és b függvényében. A $DD'N$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján $D'N^2 = D'D^2 + DN^2 = a^2 + a^2 + b^2$, tehát $D'N = \sqrt{2a^2 + b^2}$. Hasonlóan a BCN derékszögű háromszögben $CN^2 = BN^2 + BC^2 = (2a)^2 + b^2$, tehát $CN = \sqrt{4a^2 + b^2}$, és $D'C = a\sqrt{2}$. **(1 pont)**

A $D'NC$ háromszögben fennáll a $CN^2 = D'N^2 + D'C^2$ összefüggés. Így Pitagorasz tételének fordított tétele alapján következik, hogy $D'N \perp D'C$, tehát az $MND'C$ négyszög téglalap. **(1 pont)**

c) Az AND' és AMC síkok azonosak az $AND'C'$ és $AMCC'$ síkokkal, ezeknek a metszésvonala az AC' egyenes. Meghúzzuk a két síkban az AC' metszésvonalra merőleges egyeneseket: $AK \perp AC'$, $K \in ND'$ és $AL \perp AC'$, $L \in MC$, ahonnan következik, hogy $AK \perp D'N$ és $AL \perp MC$. Így az AK és AL egyenesek szöge éppen a keresett síkok által közrezárt szöggel egyenlő. **(1 pont)**

Mivel az AND' és AMC háromszögek kongruensek, ezért $AK = AL$, tehát $NK = ML$, de $NK \parallel ML$, ahonnan következik, hogy $NMLK$ téglalap. Mivel $MN = a\sqrt{2}$, következik, hogy $KL = a\sqrt{2}$. **(1 pont)**

Az AND' derékszögű háromszögben AK magasság,
ezért $AK = \frac{AN \cdot AD'}{D'N} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} = AL$. **(0,5 pont)**

Legyen AP az AKL egyenlő szárú háromszög magassága, így $LP = \frac{KL}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Az ALP derékszögű háromszögben $\cos\widehat{ALP} = \frac{LP}{AL} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért $\widehat{ALP} = 30^o$, tehát $\widehat{KAL} = 120^o$, de az AK és AL egyenesek által alkotott hegyesszöget kell venni,
így $(\widehat{(AND'), (AMC)}) = 60^o$. **(0,5 pont)**

■