V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy $(\sqrt{2023}-1)(\sqrt{2022}-2)(\sqrt{2021}-3)\cdot\cdots\cdot(\sqrt{1}-2023)<0$.

Faluvégi Melánia, Zilah

b) Határozd meg az összes a, b, c és d nem nulla egész számot, tudva, hogy páronként relatív prímek és $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=d$.

Dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A szorzat mindegyik tényezője $\sqrt{2024-n}-n$ alakú, ahol $1\le n\le 2023$, és n természetes szám. Mivel a szorzat előjele a pozitív, illetve negatív tényezők számától függ, összeszámoljuk, hogy hány negatív tényező van. **(1 pont)**
A következő átalakításokat végezzük: $\sqrt{2024-n}-n<0 \iff n>\sqrt{2024-n}$, ahonnan $n^2>2024-n \iff n^2+n>2024 \iff n(n+1)>2024 \iff n\ge 45$. **(1 pont)**
A szorzat 2023 tényezőt tartalmaz, ebből 44 pozitív, a többi pedig negatív, így $2023-44=1979$, azaz páratlan sok negatív tényező van, tehát a szorzat negatív. **(1 pont)**

b) Az $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=d$ összefüggés bal oldali tagjait közös nevezőre hozva, majd összeadva az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$\frac{a^2c+ab^2+bc^2}{abc}=d.$$

(1 pont)

Ez az aránypárok alaptulajdonságát felhasználva a következő módon alakítható át:

$$a^2c+ab^2+bc^2=abcd \iff bc^2=abcd-a^2c-ab^2 \iff bc^2=a(bcd-ac-b^2).$$

(1 pont)

Mivel a jobb oldal osztható a-val, ezért a-nak a bal oldalt, azaz bc^2-et is osztania kell. **(1 pont)**
De $(a,b)=1$, ezért $a|c^2$, viszont $(a,c)=1$, így $a\in\{-1;1\}$. **(1 pont)**
Teljesen hasonló átalakítások alapján $b|a^2c$ és $c|ab^2$, de $(a,b)=1$, $(b,c)=1$, ill. $(c,a)=1$ feltételek miatt $a,b,c,\in\{-1,1\}$. **(1 pont)**
A kapott értékeket az eredeti összefüggésbe helyettesítve a következő nyolc számnégyest kapjuk:

$$(a,b,c,d)\in\{(1,1,1,3);\ (1,1,-1,-1);\ (1,-1,1,-1);\ (-1,1,1,-1);\ (1,-1,-1,-1);\ (-1,1,-1,-1);\ (-1,-1,1,-1);\ (-1,-1,-1,3)\}.$$ **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Oldd meg az egész számok halmazán a $4xy - 12x + 5y = 2023$ egyenletet!

Papp Ilonka, Brassó

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Kifejezzük az egyenletből az y ismeretlent az x segítségével. Ekkor

$$y = \frac{12x + 2023}{4x + 5}.$$

(1 pont)

Mivel $y \in \mathbb{Z}$, ezért $\frac{12x+2023}{4x+5}$ is egész kell legyen. Ez pontosan akkor teljesül, ha $(4x+5) \mid (12x+2023)$. **(1 pont)**

De $(4x + 5) \mid (4x + 5)$, ezért $(4x + 5) \mid [(12x + 2023) - 3 \cdot (4x + 5)]$, azaz $(4x + 5) \mid 2008$. **(3 pont)**

Mivel $4x + 5$ páratlan egész szám, és $(4x + 5) \mid 2008$, ezért $4x + 5 \in \{\pm 1; \pm 251\}$. **(1 pont)**

Ha $4x + 5 = 1$, akkor $x = -1$, és $y = 2011$. **(0,5 pont)**

Ha $4x + 5 = -1$, akkor $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. **(0,5 pont)**

Ha $4x + 5 = 251$, akkor $x = \frac{123}{2} \notin \mathbb{Z}$. **(0,5 pont)**

Ha $4x + 5 = -251$, akkor $x = -64$, és $y = -5$. **(0,5 pont)**

Tehát $(x, y) \in \{(-1, 2011); (-64, -5)\}$. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az egyenlet mindkét oldalából kivonva 15-öt, az alábbi ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

$$4xy - 12x + 5y - 15 = 2023 - 15 \iff 4x(y - 3) + 5(y - 3) = 2008 \iff (4x + 5)(y - 3) = 2008.$$

(3 pont)

A 2008 egész osztói: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 251, ± 502, ± 1004, ± 2008. **(2 pont)**

Figyelembe véve, hogy $y - 3 \in \mathbb{Z}$, és $4x + 5$ páratlan egész szám, **(1 pont)**
a következő esetek lehetségesek:

Ha $4x + 5 = 1$ és $y - 3 = 2008$, akkor $x = -1$ és $y = 2011$. **(0,5 pont)**

Ha $4x + 5 = -1$ és $y - 3 = -2008$, akkor $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ és $y = -2005$. **(0,5 pont)**

Ha $4x + 5 = 251$ és $y - 3 = 8$, akkor $x = \frac{123}{2} \notin \mathbb{Z}$ és $y = 11$. **(0,5 pont)**

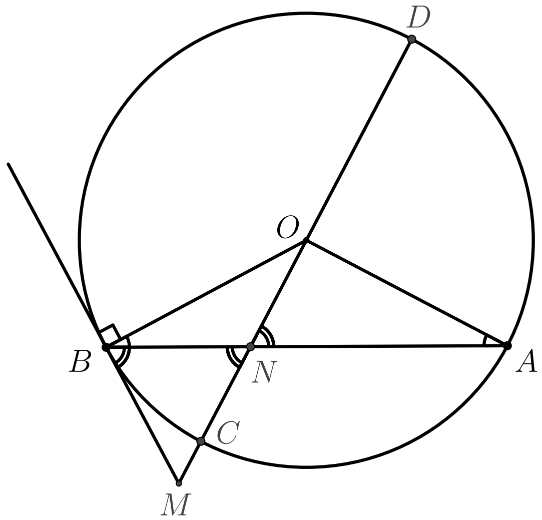
Ha $4x + 5 = -251$ és $y - 3 = -8$, akkor $x = -64$ és $y = -5$. **(0,5 pont)**

Tehát $(x, y) \in \{(-1, 2011); (-64, -5)\}$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Egy O középpontú kör AB húrjának B pontjában érintőt húzunk a körhöz. A kör CD átmérőjének tartóegyenese M pontban metszi a B-ben húzott érintőt ($M \neq B$), valamint N pontban az AB húr tartóegyenesét. Bizonyítsd be, hogy CD akkor és csak akkor merőleges OA-ra, ha $BM = MN$.
Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



I. Először bizonyítsuk, hogy ha $CD \perp OA$, akkor $BM = MN$.
Ha $CD \perp OA$, akkor $\widehat{ONA} + \widehat{OAN} = 90°$. (**1 pont**)

Ugyanakkor $\widehat{ONA} \equiv \widehat{BNM}$ (csúcsszögek) és $\widehat{OAN} \equiv \widehat{OBN}$ ($AOB_\triangle$ egyenlő szárú). (**1 pont**)

Ez utóbbi két összefüggést behelyettesítve az $\widehat{ONA} + \widehat{OAN} = 90°$ összefüggésbe kapjuk, hogy $\widehat{BNM} + \widehat{OBN} = 90°$. (**1 pont**)

Ugyanakkor $\widehat{OBN} + \widehat{NBM} = 90°$ ($OB \perp BM$), így $\widehat{MBN} \equiv \widehat{MNB}$, tehát $MB = MN$. (**1 pont**)

II. Bizonyítsuk, hogy ha $BM = MN$, akkor $CD \perp OA$.
Az $MBN_\triangle$ egyenlő szárú, ezért $\widehat{MBN} = \widehat{MNB}$. (**1 pont**)

Ugyanakkor $\widehat{MNB} \equiv \widehat{ANO}$, hiszen csúcsszögek. (**1 pont**)

A fenti két összefüggésből következik, hogy $\widehat{MBN} \equiv \widehat{ANO}$, de $\widehat{MBN} + \widehat{OBN} = 90°$, ez pedig azt jelenti, hogy $\widehat{OBN}$ és $\widehat{ANO}$ egymás pótszögei, azaz $\widehat{OBN} + \widehat{ANO} = 90°$. (**1 pont**)

Mivel OA és OB sugarak a körben, $OAB_\triangle$ egyenlő szárú, tehát $\widehat{OBA} \equiv \widehat{OAB}$. (**1 pont**)

A fentiekből következik, hogy $\widehat{OAN} + \widehat{ONA} = 90°$, így az $AON_\triangle$ derékszögű kell legyen. (**1 pont**)

Vagyis a CD átmérő merőleges az AO sugárra.

■

4. feladat (10 pont)**.** Egy kosárban négy fajta alma van, amelyek száma összesen 50-nél több. Tudjuk, hogy bárhogyan választunk ki a kosárból 50 almát, a kiválasztottak között mindig van mind a négy fajtából. Legtöbb hány alma lehet a kosárban? *Császár Sándor, Csíkszereda*

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Ha a kosárban pontosan 50 alma lenne, mivel mindegyik fajtából legalább $1-1$ almának lennie kell, ezért az egyik fajtából legfeljebb 47 darab lehet ($47+1+1+1=50$). (**1 pont**)

Azonban több, mint 50 alma van, ezért valamelyik fajtából legalább 1 darabbal többnek kell lennie. Belátható, hogy sem $51=1+1+2+47$, sem $51=1+1+1+48$ alma nem lehet, hiszen ekkor kiválasztható 50 darab úgy, hogy csak három fajta alma legyen. (**1 pont**)

A fentiekből következik, hogy mindegyik fajta almából legalább 2 darab van, és mivel legalább 51 alma van, így $51=2+2+2+45$ almának lennie kell. Ugyanakkor azt is beláttuk, hogy lehet a kosárban pontosan 51 darab alma. (**1 pont**)

Ha 52 alma lenne, az $52=2+2+2+46$ és $52=2+2+3+45$ esetekből arra a megállapításra jutunk, hogy mindegyik fajtából legalább 3 darabnak kell lennie, és $52=3+3+3+43$ miatt lehet 52 alma a kosárban. (**1 pont**)

Teljesen hasonló módon belátható, hogy a kosárban levő almák fajták szerinti megoszlása a következő lehet: 53 darab alma esetén $53=4+4+4+41$, 54 darab alma esetén $54=5+5+5+39$, 55 darab alma esetén $55=6+6+6+37$, $\ldots$, 59 darab alma esetén $59=10+10+10+29$, $\ldots$, 65 darab alma esetén $65=16+16+16+17$. (**1 pont**)

Viszont 66 vagy annál több alma esetén nem lehetséges a helyes kiválasztás, mert ha a kosárban levő almák fajták szerinti megoszlása $a \leq b \leq c \leq d$, akkor a feladat feltételeinek megfelelő kiválasztáshoz teljesülnie kell a $b+c+d \leq 49$ egyenlőtlenségnek. A legnagyobb ilyen darabszámok $a=b=c=16$ és $d=17$. (**3 pont**)

Tehát a kosárban legtöbb 65 alma lehet. (**1 pont**)

■