V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

VI. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Egy iskola focicsapata két egymást követő nap fontos meccset játszott. A csapat szurkolói elhatározták, hogy a meccsekre a csapat színeibe öltöznek: kékbe vagy fehérbe. Első nap a szurkolók $\frac{3}{4}$-e fehérbe, míg a többiek kékbe öltöztek. Második nap az előző naphoz képest 40%-kal kevesebben öltöztek fehérbe és 80%-kal többen kékbe.

a) Tudva azt, hogy mindkét nap minden jelenlevő szurkoló beöltözött, de a második nap 8 szurkoló hiányzott, számítsd ki az első mérkőzésen részt vevő szurkolók számát!

b) A két napot együttvéve, mennyivel egyenlő a fehérbe, illetve kékbe öltözött szurkolók számának aránya?

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen x az első napi mérkőzésen részt vevő szurkolók száma.
I. nap fehérbe öltözött $\frac{3}{4} \cdot x$ szurkoló és kékbe öltözött $\frac{1}{4} \cdot x$ szurkoló. **(1 pont)**

II. nap fehérbe öltözött $\frac{60}{100} \cdot \frac{3}{4} \cdot x = \frac{45}{100} \cdot x$ szurkoló, és **(1 pont)**

kékbe öltözött $\frac{180}{100} \cdot \frac{1}{4} \cdot x = \frac{45}{100} \cdot x$ szurkoló. **(1 pont)**

A második nap szurkolóinak száma összesen: $\frac{45}{100} \cdot x + \frac{45}{100} \cdot x = \frac{90}{100} \cdot x$.
Mindezeket felhasználva az $x = \frac{90}{100} \cdot x + 8$ egyenlethez jutunk. **(2 pont)**

Az egyenletet megoldva következik, hogy $x = 80$.
Tehát az első napi mérkőzésen 80 szurkoló vett részt. **(1 pont)**

b) I. nap fehérbe öltözött $\frac{3}{4} \cdot 80 = 60$ szurkoló és kékbe öltözött $\frac{1}{4} \cdot 80 = 20$ szurkoló. **(1 pont)**

II. nap fehérbe öltözött $\frac{45}{100} \cdot 80 = 36$ szurkoló és kékbe öltözött szintén 36 szurkoló. **(1 pont)**

A keresett arány: $\frac{60+36}{20+36} = \frac{96}{56} = \frac{12}{7}$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Az $a < b$ természetes számok legnagyobb közös osztója 17, legkisebb közös többszöröse pedig 2023.

a) Határozd meg az a és b számokat!

b) Határozd meg az összes (x, y) számpárt, ha x és y prímszámok és $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} < \frac{1}{17}$, ahol a és b az a) alpontban kapott számok!

Mátéfi István, Marosvásárhely
Czenter Enikő, Nagykároly
Vad Márta, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $(a, b) = 17$, kapjuk, hogy $a = 17k$ és $b = 17l$, ahol $(k, l) = 1$, $k < l$. **(1 pont)**
Ismert, hogy $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, tehát $a \cdot b = 17 \cdot 2023$, vagyis $a \cdot b = 7 \cdot 17^3$. **(1 pont)**
Mivel $a = 17k$ és $b = 17l$, következik, hogy $k \cdot l = 7 \cdot 17$. **(1 pont)**
Tehát $k = 1$ és $l = 119$ vagy $k = 7$ és $l = 17$.
A keresett számok $a = 17$ és $b = 2023$ vagy $a = 119$ és $b = 289$. **(2 pont)**

b) Ha $a = 17$ és $b = 2023$, akkor $\frac{x}{17} + \frac{y}{2023} < \frac{1}{17}$, ahonnan kapjuk, hogy $119x + y < 119$, ami nem lehetséges. **(1 pont)**
Ha $a = 119$ és $b = 289$, akkor $\frac{x}{119} + \frac{y}{289} < \frac{1}{17}$, ahonnan kapjuk, hogy $17x + 7y < 119$, tehát $x \in \{2, 3, 5\}$.
Ha $x = 2$, akkor $7y < 85$, ahonnan $y \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$. **(1 pont)**
Ha $x = 3$, akkor $7y < 68$, ahonnan $y \in \{2, 3, 5, 7\}$. **(0,5 pont)**
Ha $x = 5$, akkor $7y < 34$, ahonnan $y \in \{2, 3\}$. **(0,5 pont)**
A lehetséges (x, y) számpárok:
$(2, 2)$; $(2, 3)$; $(2, 5)$; $(2, 7)$; $(2, 11)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(3, 5)$; $(3, 7)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Adottak az A_1, $A_2, \ldots, A_{21}$ kollineáris pontok ebben a sorrendben. Az A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, $A_4A_5, \ldots, A_{20}A_{21}$ szakaszok hossza fordítottan arányos az 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{39}$ számokkal, és tudjuk, hogy az A_1A_{21} szakasz hossza 400 cm.

a) Számítsd ki az A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \ldots, A_{20}A_{21}$ szakaszok közül a legrövidebb, illetve a leghosszabb szakasz hosszát!

b) Az A_1A_2, $A_3A_4, \ldots, A_{19}A_{20}$ szakaszok belső pontjait zöldre, míg az A_2A_3, $A_4A_5, \ldots, A_{20}A_{21}$ szakaszok belső pontjait pirosra színezzük. Milyen színű lesz az A_1A_{21} szakasz felezőpontja?

c) Az A_1, A_2, $A_3 \ldots$, A_{21} pontok által meghatározott szakaszok között van-e olyan, amelynek a kezdőpontja A_1 és felezőpontja nincs kiszínezve?

Mátéfi István, Marosvásárhely
Czenter Enikő, Nagykároly
Vad Márta, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a)

$$\frac{A_1A_2}{1} = \frac{A_2A_3}{\frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{A_3A_4}{\frac{1}{\frac{1}{5}}} = \ldots = \frac{A_{19}A_{20}}{\frac{1}{\frac{1}{37}}} = \frac{A_{20}A_{21}}{\frac{1}{\frac{1}{39}}}$$ **(1 pont)**

$$\frac{A_1A_2}{1} = \frac{A_2A_3}{3} = \frac{A_3A_4}{5} = \ldots = \frac{A_{19}A_{20}}{37} = \frac{A_{20}A_{21}}{39} =$$
$$= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \ldots + A_{19}A_{20} + A_{20}A_{21}}{1+3+5+\ldots+37+39} =$$
$$= \frac{A_1A_{21}}{(1+39)+(3+37)+\ldots+(19+21)} = \frac{400}{10\cdot 40} = \frac{400}{400} = 1.$$ **(1 pont)**

Innen következik, hogy:

$$A_1A_2 = 1 \text{ cm},\ A_2A_3 = 3 \text{ cm},\ A_3A_4 = 5 \text{ cm},\ \ldots,\ A_{20}A_{21} = 39 \text{ cm}.$$

Tehát a legrövidebb $A_1A_2 = 1$ cm, a leghosszabb $A_{20}A_{21} = 39$ cm. **(2 pont)**

b) Jelölje M az A_1A_{21} szakasz felezőpontját, ekkor

$$A_1M = MA_{21} = \frac{A_1A_2}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ cm},$$
$$A_{15}A_{16} + A_{16}A_{17} + \ldots + A_{20}A_{21} = 29 + 31 + \ldots + 39 = 204 \text{ cm}.$$ **(1 pont)**

Következik, hogy M az $A_{15}A_{16}$ szakasz belső pontja, tehát zöld színű. **(1 pont)**

c) Az A_1, A_2, $A_3 \ldots$, A_{21} pontok nincsenek kiszínezve. Meghatározzuk a szakaszok hosszát:

$$A_1A_2 = 1, A_1A_3 = 1+3 = 2^2, A_1A_4 = 1+3+5 = 3^2, \ldots,\ A_1A_{21} = 20^2.$$

Észrevehető, hogy a felsorolt szakaszok hossza mindig teljes négyzet. **(1 pont)**
Jelölje M_1, $M_2 \ldots$, M_{20} rendre az A_1A_2, $A_1A_3, \ldots$, A_1A_{21} szakaszok felezőpontját.

$$A_1M_1 = \frac{A_1A_2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{nem teljes négyzet}$$
$$A_1M_2 = \frac{A_1A_3}{2} = \frac{2^2}{2} = 2 \quad \text{nem teljes négyzet}$$
$$\ldots$$
$$A_1M_{20} = \frac{A_1A_{21}}{2} = \frac{20^2}{2} = 200 \quad \text{nem teljes négyzet}$$ **(1 pont)**

Mivel egy teljes négyzet fele nem lehet teljes négyzet, ezért nem létezik olyan A_1A_2, $A_1A_3, \ldots$, A_1A_{21} szakasz, amelynek felezőpontja nincs kiszínezve, tehát minden szakasz felezőpontja ki van színezve. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Egy tetszőleges AOB szöget az O csúcspontjából kiinduló félegyenesekkel 36 darab egymással kongruens szögre osztunk, majd ugyanezt az AOB szöget ugyanilyen módon 48 darab egymással kongruens szögre osztunk.

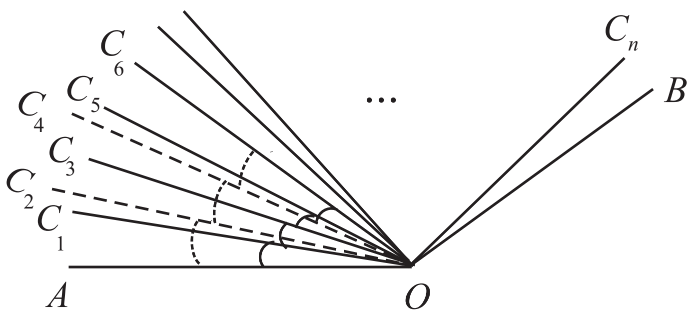
a) Hány félegyenest kapunk az AOB szög belsejében?

b) Határozd meg az AOB szög mértékét, ha az OA szártól számított 6. és 18. félegyenesek 24°-os szöget alkotnak!

c) Tudva, hogy az AOB szög mértéke 144°, hány fokos szöget zár be az OA szártól számított 20. és 30. félegyenes?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Az ábra elkészítése. **(1 pont)**
Mivel $\frac{3}{36} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} \implies$ az első felosztás 3. félegyenese megegyezik a második felosztás 4. félegyenesével. **(1 pont)**
Így a szög $\frac{1}{12}$-ét ábrázoló félegyenes az OA-tól számítva a 6. félegyenes. **(1 pont)**
Ezt a felosztást összesen 12-szer elvégezve jutunk el a szög OB száráig. Tehát a félegyenesek száma az AOB szög belsejében $6 \cdot 12 - 1 = 71$. **(2 pont)**

b) Az előző alpont alapján $\widehat{AOC_6} = \widehat{C_6OC_{12}} = \widehat{C_{12}OC_{18}} = \ldots = \widehat{C_{66}OB}$. **(1 pont)**
Mivel $\widehat{C_6OC_{18}} = 24° \implies \widehat{AOC_6} = 12° \implies \widehat{AOB} = 12 \cdot 12° = 144°$. **(1 pont)**

c) $\widehat{C_{18}OC_{20}} = \widehat{AOC_2} = 4°$ és $\widehat{C_{18}OC_{30}} = \widehat{AOC_{12}} = 2 \cdot 12° = 24°$. **(1 pont)**
Tehát $\widehat{C_{20}OC_{30}} = \widehat{C_{18}OC_{30}} - \widehat{C_{18}OC_{20}} = 24° - 4° = 20°$. **(1 pont)**

■