V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
országos szakasz, Arad, 2023. február 20–23.

V. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyekre az $A = 9^n + 2 \cdot 3^n + 1$ szám osztható 10-zel!

Simon József, Csíkszereda
Hodgyai Edit, Micske

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Egy szám, akkor osztható 10-zel, ha a szám utolsó számjegye 0.
Ha $n = 0$, akkor $u(A) = u(9^0) + 2 \cdot u(3^0) + 1 = u(1 + 2 + 1) = u(4) = 4$. Ez nem osztható 10-zel. **(1 pont)**
Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $n \geq 1$.
Ha $n = 1$, akkor $u(A) = u(9^1) + 2 \cdot u(3^1) + 1 = u(9 + 6 + 1) = u(16) = 6$. Ez nem osztható 10-zel. **(1 pont)**
Ha $n = 2$, akkor $u(A) = u(9^2) + 2 \cdot u(3^2) + 1 = u(1 + 8 + 1) = u(10) = 0$. Ez osztható 10-zel. **(1 pont)**
Ha $n = 3$, akkor $u(A) = u(9^3) + 2 \cdot u(3^3) + 1 = u(9 + 2 \cdot 7 + 1) = u(24) = 4$. Ez nem osztható 10-zel. **(1 pont)**
Ha $n = 4$, akkor $u(A) = u(9^4) + 2 \cdot u(3^4) + 1 = u(1 + 2 \cdot 1 + 1) = u(4) = 4$. Ez sem osztható 10-zel. **(1 pont)**
Ha folytatjuk a felírást n további értékeire, akkor négyesével ismétlődni fog A utolsó számjegye, és rendre 6, 0, 4, illetve 4 lesz. **(2 pont)**
Mivel minden négyes csoport második értéke 0, ezért A pontosan akkor osztható 10-zel, ha n értékei $\{2, 6, \ldots, 4 \cdot k + 2, \ldots\}$, ahol k természetes szám. **(2 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

$$A = 9^n + 2 \cdot 3^n + 1 = 3^n \cdot 3^n + 3^n + 3^n + 1 = 3^n \cdot (3^n + 1) + 3^n + 1 \qquad \textbf{(3 pont)}$$
$$= (3^n + 1) \cdot (3^n + 1) = (3^n + 1)^2. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

A 3^2, 3^6, ..., 3^{4k+2} számok minden k természetes szám esetén 9-ben végződnek,
és ekkor az A szám 0-ban végződik, ezért osztható 10-zel. **(2 pont)**
A keresett számok tehát az $n = 4 \cdot k + 2$ alakú számok, ahol k természetes szám. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Bence és Csilla 2022 nyarán együtt táborozott. Feladatban közölték születési éveiket.

> **Bence**: Ha összeadom a 2 hatványait úgy, hogy a hatványkitevők 3-mal induló, egymást követő természetes számok, akkor azt az évszámot kapom, amikor 30 éves leszek.
>
> **Csilla**: A $9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots9}_{2023}$ összegben található 1-es számjegyek száma az az évszám, amikor 10 éves voltam.

Hány évesek a gyerekek idén?

Hamar Erzsébet, Marosvásárhely
Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Bence *Első megoldás*
A tábort 2022-ben tartották, ahol Bence iskolás, tehát a keresett szám 2022-nél nagyobb és 2052-nél biztosan kisebb. (**1 pont**)
Viszont tudjuk, hogy a hatványkitevők egymást követő természetes számok, amelyek közül a legkisebb 3, így kiszámíthatjuk a következőket:
$2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9=8+16+32+64+128+256+512=1016<2022$ (**1 pont**)
$2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+2^{11}=8+16+32+64+128+256+512+1024+2048=4088>2052$ (**1 pont**)
Így a keresett szám a $2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}=8+16+32+64+128+256+512+1024=2040$, (**1 pont**)
és Bence $2040-30=2010$-ben született, azaz $2023-2010=13$ éves. (**1 pont**)

Bence *Második megoldás*
$2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+\cdots+2^n-30<2022$ (**1 pont**)
$2^3\cdot(1+2+2^2+2^3)+2^7\cdot(1+2+2^2+2^3)+\cdots+2^{n-3}\cdot(1+2+2^2+2^3)-30<2022$ (**1 pont**)
$(1+2+2^2+2^3)\cdot(2^3+2^7+\cdots+2^{n-3})-30<2022$
$(1+2+4+8)\cdot(2^3+2^7+\cdots+2^{n-3})-30<2022$
$15\cdot(2^3+2^7+\cdots+2^{n-3})-30<2022$
$\underbrace{2^3+2^7+\cdots+2^{n-3}}_{\text{természetes szám}}<\frac{2022+30}{15}=\frac{2052}{15}$
Mivel $2052=136\cdot15+12$, ezért a 2 hatványainak összege nem lehet nagyobb 136-nál. (**1 pont**)
De $2^3+2^7=8+128=132$, következik, hogy $2^7=2^{n-3}$, azaz $n-3=7$, ahonnan $n=10$. (**1 pont**)
Tehát $15\cdot(2^3+2^7)-30=15\cdot136-30=2040-30=2010$,
így Bence $2023-2010=13$ éves. (**1 pont**)

Csilla:

$9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots9}_{2023}=(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+\left(1\underbrace{000\ldots0}_{2023}-1\right)=$ (**1 pont**)

$=10+100+1000+\cdots+1\underbrace{000\ldots0}_{2023}-2023=\underbrace{111\ldots1}_{2019}09087$ (**2 pont**)

Tehát 2019 darab 1-es számjegyet tartalmaz az eredmény, ami azt jelenti, hogy
Csilla $2019-10=2009$-ben született, azaz $2023-2009=14$ éves. (**1 pont**)
■

3. feladat (10 pont)**.** Adottak egyforma méretű, piros és fehér dobókockák. A dobókockák szabványosak, azaz a szemben lévő lapok pöttyeinek összege 7.

a) Csongor két fehér és néhány piros dobókockából $3 \times 3 \times 3$-as kockát épít úgy, hogy annak a lehető legkevesebb tarka lapja legyen. Hová helyezi el a fehér dobókockákat, és az így elkészített kocka hány lapja lesz tarka? Válaszod indokold!

b) Legtöbb hány pötty látszódhat Csongor $3\times3\times3$-as megépített kockájának hat lapján összesen?

Hodgyai Edit, Micske
Polgár István, Gyergyószentmiklós

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Ahhoz, hogy a $3 \times 3 \times 3$-as kocka lehető legkevesebb lapja legyen tarka, a sarokkocka nem lehet fehér, mert úgy három lapon is látszana. **(1 pont)**
Ugyancsak ezen az elven, a fehér dobókocka nem szerepelhet a kocka élein, mert úgy két lapon is látszana. **(1 pont)**
A fehér dobókockákat Csongor még elhelyezheti egy oldallap közepére, így az csak azon az oldallapon lesz látható. **(1 pont)**
Ahhoz, hogy a kockának a lehető legkevesebb tarka lapja legyen, az egyik fehér dobókockát a kocka belsejébe rejti. Mivel a $3 \times 3 \times 3$-as kocka belsejébe csak egy dobókocka fér el, a másik fehér dobókockát az egyik oldallap közepére fogja helyezni. **(1 pont)**
Így csak egy tarka lapja lesz a kockának. **(1 pont)**

b) A $3 \times 3 \times 3$-as nagy kockát alkotó dobókockák lehetnek:
- sarok kockák, melyeknek három lapja látszik és 8 darab van belőlük. A legtöbb pötty egy ilyen sarokkockán $6 + 5 + 4 = 15$, így a 8 darab összesen $8 \cdot 15 = 120$ pöttyöt tartalmaz. **(1 pont)**
- élkockák, melyeknek két lapja látszik és 12 darab van belőlük. A legtöbb pötty egy ilyen élkockán $6 + 5 = 11$, így a 12 darab összesen $12 \cdot 11 = 132$ pöttyöt tartalmaz. **(1 pont)**
- oldallap középső kockái, melyeknek egy lapja látszik, 6 darab van belőlük. A legtöbb pötty egy ilyen élkockán 6, így a 6 darab összesen $6 \cdot 6 = 36$ pöttyöt tartalmaz. **(1 pont)**
Tehát a Csongor által épített $3 \times 3 \times 3$-as kockán összesen legtöbb $120 + 132 + 36 = 288$ pötty fog látszani. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Adottak azok a természetes számok, amelyek négyzetének 5-tel való osztási maradéka 1.

a) Határozd meg az első 2023 ilyen négyzetszám összegének 5-tel való osztási maradékát!

b) Igazold, hogy 2023-ig az adott természetes számok összegének utolsó számjegye 1.

Polgár István, Gyergyószentmiklós
Hodgyai Edit, Micske
Hamar Erzsébet, Marosvásárhely

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Elkezdjük összeadni azokat a természetes számokat, amelyek négyzetének 5-tel való osztási maradéka 1. Két ilyen számot összeadva az 5-tel való osztási maradék $1+1=2$, hármat összeadva $1+1+1=3$, négyet összeadva $1+1+1+1=4$, viszont ötöt összeadva az 5-tel való osztási maradék $1+1+1+1+1=5$ lenne, viszont ez 0 maradékot jelent. **(2 pont)**
Így, ha összeadjuk az első 2023 ilyen számot, akkor meg kell vizsgáljuk, hogy az 5 a 2023-ban hányszor van meg. Elosztva a két számot 404-et kapunk, ami azt jelenti, hogy $404 \cdot 5 = 2020$ ilyen természetes szám összege 0-t ad maradékul. **(1 pont)**
Ehhez még hozzáadva az utolsó három hasonló tulajdonságú számot azt kapjuk, hogy a maradék $0+1+1+1=3$. **(1 pont)**

b) Ha egy természetes szám négyzetének 5-tel való osztási maradéka 1, akkor az adott négyzetszám csak 1-ben vagy 6-ban végződhet. **(1 pont)**
Azok a számok, amelyek négyzete 1-ben végződik, csak 1-ben vagy 9-ben végződhetnek, és amelyek négyzete 6-ban végződik, azok csak 4-ben vagy 6-ban végződhetnek. **(1 pont)**
Az első négy ilyen szám az 1, 4, 6 és 9, melyek összege 20.
A következő négy ilyen szám a 11, 14, 16 és 19, melynek összege $40+20=60$.
Ha tovább folytatjuk négyesével a számok felírását, rendre a következő számokat kapjuk:
21, 24, 26 és 29, melyek összege $80+20=100=5\cdot 20$
31, 34, 36 és 39, melyek összege $120+20=140=7\cdot 20$
41, 44, 46 és 49, melyek összege $160+20=180=9\cdot 20$ és így tovább. **(1 pont)**
Megfigyelhető, hogy két egymás utáni 10 többszörös közé eső négy ilyen tulajdonságú szám összege 20 többszöröse. Így 2020-ig az adott tulajdonságú számok összege is 20 többszöröse lesz, tehát 0-ra végződik. **(1 pont)**
Ehhez egyetlen számot kell még hozzáadni, a 2021-et, mert a 2024 már több, mint 2023.
Tehát az utolsó számjegy $0+1=1$ lesz. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Jelölje az első 2023 ilyen négyzetszámot $n_1^2 = 5\cdot k_1+1$, $n_2^2 = 5\cdot k_2+1$, $n_3^2 = 5\cdot k_3+1$, ..., $n_{2023}^2 = 5\cdot k_{2023}+1$, ahol k_1, k_2, k_3, ..., k_{2023} természetes számok. **(1 pont)**
Ezek összege: $n_1^2+n_2^2+n_3^2+\ldots+n_{2023}^2 = 5\cdot k_1+1+5\cdot k_2+1+5\cdot k_3+1+\ldots+5\cdot k_{2023}+1 = 5\cdot(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_{2023})+2023$. **(1 pont)**
Az $5\cdot(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_{2023}) \vdots 5$ és $2023 = 5\cdot 404+3$.
Tehát az első 2023 szám összegének osztási maradéka 3. **(1 pont)**

b) Az első megoldásban meghatározott kért tulajdonságú számok összege akár ki is számítható, és az összeg ismeretében leolvasható annak utolsó számjegye.
Az összeg: $1+4+6+9+\cdots+2011+2014+2016+2019+2021$, mert $2024 > 2023$. **(1 pont)**
$1+4+6+9=20=1\cdot 20$, $11+14+16+19=60=3\cdot 20$, $21+24+26+29=100=5\cdot 20,\ldots,$
$2011+2014+2016+2019=8060=403\cdot 20$ **(1 pont)**
Így az összeg: $1\cdot 20+3\cdot 20+5\cdot 20+\ldots+403\cdot 20+2021 = 20\cdot(1+3+5+\ldots+403)+2021 =$ **(2 pont)**
$= 20\cdot\frac{404\cdot(201+1)}{2}+2021 = 81608\cdot 10+2021 = 818101$. Tehát az utolsó számjegy 1. **(2 pont)**

■